知识介绍

莫 尔 圆 的 妙 用

武 立 生

（镇江农机学院）

奥托莫尔（Otto Mohr 1835—1918）作为一位著名的工程师兼工程力学教授，在他一生的研究工作中，特别注重用图解法求解结构理论和材料力学中的问题．莫尔圆的创造突出地证明了这一点．莫尔圆——一点上应力的图示法，巧妙地把代数运算通过简单的作图反映出来． 现在莫尔圆已不只是用来求一点上的应力，它的应用范围已扩大，下面举例说明莫尔圆的妙用．

（一）莫尔圆在应力状态理论中的应用

在有主应力 σ_1 和 σ_2 的二维情况下，设 $\sigma_1>\sigma_2$ 由二向应力状态的分析，得出下面的解析式，

$$\begin{cases}\sigma_\alpha=\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\sin^2\alpha\\ \tau_\alpha=\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha\end{cases}\tag{1}$$

这里 σ_α 和 τ_α 是法线倾角为 α 的任意斜面上的应力，且规定 α 永远从最大主应力 σ_1 起以反时针方向来计算．

我们将式（1）改写为

$$\begin{cases}\sigma_\alpha=\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\alpha\\ \tau_\alpha=\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha\end{cases}\tag{2}$$

令 $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=a$，$\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=r$，$\sigma=2\alpha$，$x=\sigma_\alpha$，

$y=\tau_\alpha$

则有，

$$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\tag{3}$$

所以我们得到了一个以 $\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ 为半径，以 $\left(\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2},\ O\right)$ 为圆心坐标的圆（图 1），这就是我们要作的二维情况的莫尔圆．它可用来解决两个问题：

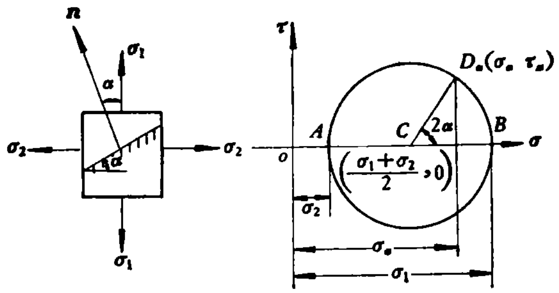

图 1

（1）已知主应力求斜面上的应力（σ_α，τ_α）

此类莫尔圆的作法（图 1）：在 σ 轴上按比例量取 OA、OB 分别表示 σ_2、σ_1，以 AB 为直径作一圆，由圆心 C 点从 σ 轴起以逆时针方向转过圆心角 2α，所得 D_α 点即相当所求的面，D_α 点的坐标值即分别为 σ_α、τ_α．反过来，由图上的几何关系，我们也很容易写出 σ_α，τ_α 的解析式．

（2）已知任意二互相垂直的斜截面上的应力，求主应力．

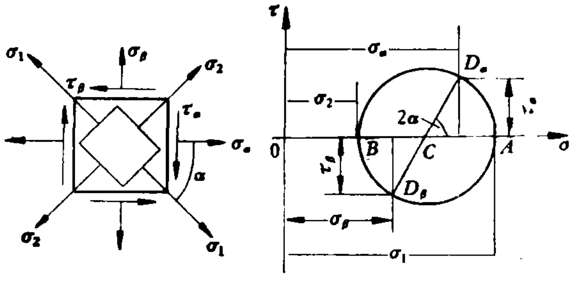

图 2

设已知互相垂直的两个面上的应力为σ_α、τ_α和 σ_β、τ_β，显然 $\tau_\alpha=-\tau_\beta$。此类莫尔圆的作法(图2)：在 σ、τ 座标系定出点 $D_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ 及 $D_\beta(\sigma_\beta, \tau_\beta)$，连接 D_α 和 D_β 交 σ 轴于 C，以 C 为圆心，CD_α 为半径作一圆，则 $OA=\sigma_1$，$OB=\sigma_2$，其数值由几何关系决定：

$$\sigma_1=OA=OC+r=OC+CD_\alpha$$

$$=OC+\sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha-\sigma_\beta}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2}$$

$$=\frac{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha+\sigma_\beta}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)+\sqrt{(\sigma_\alpha-\sigma_\beta)^2+4\tau_\alpha^2}\right]$$

$$\sigma_2=OB=OC-CB$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)-\sqrt{(\sigma_\alpha-\sigma_\beta)^2+4\tau_\alpha^2}\right]$$

具有主应力 σ_1，σ_2 及 σ_3 的三维情况，按同法处理(图 3)。莫尔发现作用在通过主轴的平面上

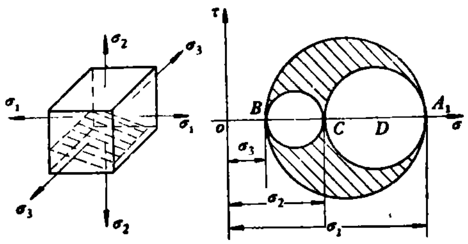

图 3

的应力分量可用在三个圆上各点的坐标表示，他还证明了与所有三个主轴都相交的平面上作用的应力可用此图上某些点的坐标表示，且所有这些点都落在阴影面积以内。

（二）莫尔圆在求惯性矩和惯性积中的应用

莫尔圆的妙用已经超出了莫尔当初的范围。用它求解惯性矩和惯性积的问题，可使这类问题大为简化，给求解材料力学和理论力学中的一些问题带来了方便。

(1) 已知任意的 J_y、J_z、J_{yz}，求 $J_{y主}$、$J_{z主}$并决定主轴之位置。

在材料力学中常常要求主形心惯性轴的位置及主形心惯性矩的大小，一般需要用移轴和转轴定理，比较麻烦。但用莫尔圆来解这类问题就比较简单。因为对任意一对互相垂直的轴的惯性矩和惯性积是可以用积分的办法求得的，这样，我们取 J_y、J_z 为横轴，J_{yz} 为纵轴，建立坐标系，按图二的作法同样地在此坐标系中作出相应的莫尔圆(图 4)，由几何关系得 $J_{y主}$、$J_{z主}$ 的大小为

$$\begin{cases} J_{y主}=\dfrac{J_z+J_y}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{(J_z-J_y)^2+4(J_{yz})^2} \\ J_{z主}=\dfrac{J_z+J_y}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{(J_z-J_y)^2+4(J_{yz})^2} \end{cases}$$

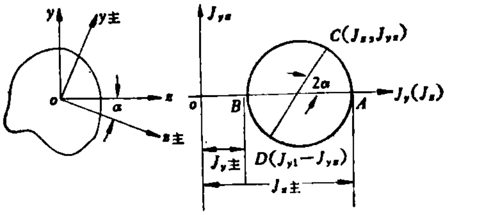

图 4

由

$$\operatorname{tg} 2\alpha=-\frac{2J_{yz}}{J_z-J_y}$$

得出

$$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2J_{yz}}{J_z-J_y}\right)$$

这里规定：α 角逆时针方向为正。由 α 决定了主形心惯性轴的位置。

(2) 已知主形心惯性矩 ($J_{y主}$，$J_{z主}$)，求对任意互相垂直的一对轴的惯性矩 (J_y，J_z) 及惯性积 (J_{yz})。

在理论力学中，常常要求一个具有对称性的物体对任意轴之惯性矩 (J_{y_α}，J_{z_α}) 及惯性积 (J_{yz_α})，例如，要求(图 5) 所示的偏角转子的轴

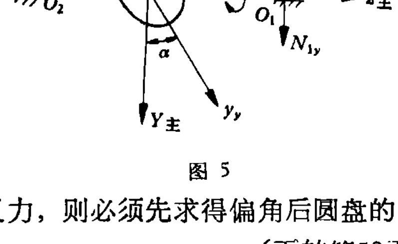

图 5

承动反力，则必须先求得偏角后圆盘的 J_{yz_α}。

(下转第59页)

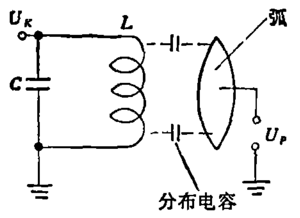

图 2

当然，这电位与振荡槽路形式有关．采用通常的 LC 并联振荡迴路，下端接地，就会使等离子体对地具有很高的电位．那末，能否采用别的振荡槽路形式，来消除等离子弧的对地电位呢？回答是肯定的．我们用两个相同的电容构成了π型振荡槽路（图 3），由于槽路的对

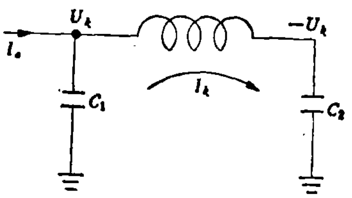

图 3

称性，使得等离子弧对地的电位接近于零．因为电感上的电压降与电容上的电压降位相相反，由于 $I_a \ll I_K$，所以有 $U_L = U_{C_1} + U_{C_2}$．今两电容相同，且下端接地，故电感（感应线圈）两端的电位，也即两电容的上端电位，一正一负，

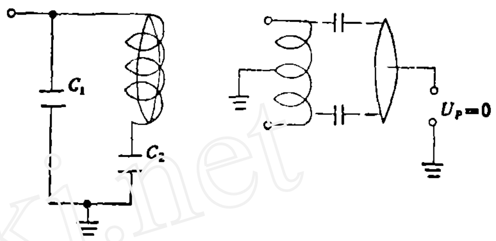

图 4

位相相反而数值相等，所以其中点电位为零；又由于感应线圈结构上下对称，通过分布电容耦合到等离子体上去的电位也接近于零．这时无论用纯氧还是纯氮作实验，无论从尾部还是从等离子体头部，用接地棒接触等离子体弧时，都不再发生放电现象，因而也不再会熄弧了．在一些带反应器的现场试验上，也取得了预期效果．

按同一道理，在采用 LC 并联振荡迴路时，若稍加改变，不在其下端或上端接地，让感应线圈中点接地（图 4），或者根本不接地（高频不接地），那也可以使等离子体对地电位或者为零或者保持不定．这时尾焰接地也不会熄弧．

（上接第 77 页）

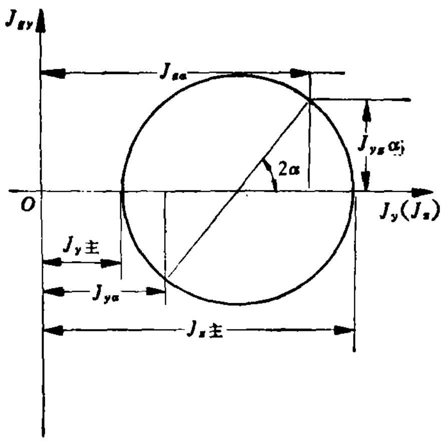

图 6

对此圆盘，由于对称性 $J_{yz\text{主}} = 0$，$J_{y\text{主}} = \frac{\pi}{4}R^4$，$J_{z\text{主}} = \frac{\pi}{2}R^4$ 即 $J_{y\text{主}}$，$J_{z\text{主}}$，$J_{yz\text{主}}$ 为已知，在图示坐标系中按作图 1 的方法作出图 6，便得出所求之 J_{y_α}，J_{z_α}，J_{yz_α} 的大小．

$$J_{y_\alpha} = \frac{J_{z\text{主}} + J_{y\text{主}}}{2} - \frac{J_{z\text{主}} - J_{y\text{主}}}{2}\cos 2\alpha$$

$$J_{z_\alpha} = \frac{J_{z\text{主}} + J_{y\text{主}}}{2} + \frac{J_{z\text{主}} - J_{y\text{主}}}{2}\cos 2\alpha$$

$$J_{yz_\alpha} = \frac{J_{z\text{主}} - J_{y\text{主}}}{2}\sin 2\alpha$$

关于莫尔圆在其他方面的应用，需要大家共同努力，进一步探讨．