

落体法测刚体转动惯量的测量方法比较

郭长立

李三庆

(西安科技大学基础部, 西安 710054) (西安工业学院建工系, 西安 710032)

摘要 用 JIJG-I 刚体转动惯量实验仪的同组数据, 分别用测角加速度法和测时间法计算待测圆盘的转动惯量, 结果表明, 测角加速度法比测时间法的测量精度可提高 1 到 2 个数量级, 具有明显优点; 同时分析了测时间法产生误差的主要原因, 也指出了使用测角加速度法的注意事项.

关键词 转动惯量, 角加速度, 时间, 相对误差

引言

刚体转动惯量实验法测定的基本方法有扭摆法和落体法两种^[1~4], 文献[1,3]介绍了落体法的原理及相应的几种测试方法, 文献[5~7]指出了扭摆法和落体法的缺陷, 文献[7]提出了用气垫摆测物体的转动惯量的实验思路, 但使用气垫使得实验变得复杂. 本文通过详细的实验数据分析了落体法中测角加速度法和测时间法的实验误差, 并比较了采用不同测试顺序情况下的测角加速度法的实验误差.

1 落体法基本原理

1.1 测时间法基本原理

文献[5]详述了测时间法的测试原理及测试方法, 其测试量为不同质量 m 的砝码拉动塔轮转 n 圈的累计时间 t , 拟合公式为 $m = k/t^2 + b$, 采用作图法或最小二乘法拟合求得 k 和 b , 由 $J = kgrt^2/(4n\pi)$ 计算刚体转动惯量.

1.2 测角加速度法基本原理

测角加速度法的基本原理是在考虑转动摩擦力矩的前提下, 通过测量仅在摩擦力矩作用下的减速情况的角加速度 β_1 , 以及在砝码拉动和摩擦力矩共同作用下的加速情况的角加速度 β_2 , 由落体下落的平动方程和刚体转动的转动方程联立求解得到转动体的转动惯量

$$J = \frac{mgr}{\beta_1 + \beta_2} - \frac{mr^2}{\beta_1 + \beta_2} \beta_2 \quad (1)$$

其中 β_1, β_2 都取绝对值.

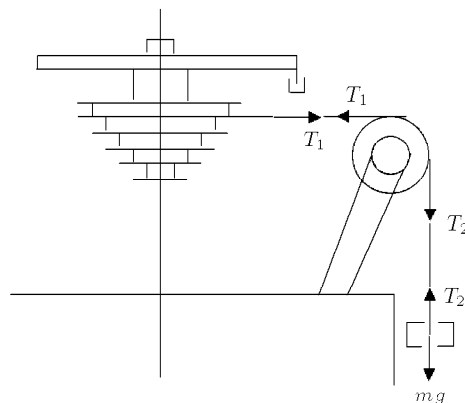


图 1 JIJG-I 刚体转动惯量实验仪示意图

2 测角加速度法和测时间法的实验误差比较

2.1 测量量的转换

为便于比较两种方法的实验误差, 本实验采用同一台实验仪器测量的同组数据, 分别采用测角加速度法和测时间法的进行计算, 由于采用的 JIJG-I 刚体转动惯量实验仪(图 1)的测量量为塔轮转 n 圈的时间 t , 需将 t 转换为角加速度 β , 转换方式如下, 假设计时开始时 ($t = 0$) 的角速度为 ω_0 .

由运动学方程:

转 k 圈

$$2k\pi = \omega_0 t_k + \frac{1}{2} \beta t_k^2 \quad (2)$$

转 j 圈

$$2j\pi = \omega_0 t_j + \frac{1}{2} \beta t_j^2 \quad (3)$$

消去初角速度 ω_0 , 得

$$\beta = \frac{4\pi(jt_k - kt_j)}{t_k t_j (t_j - t_k)} \quad (4)$$

由式(4)可转换得到加速情况下的角加速度 β_2 ; 在减速情况下, 必须用新的计时零点和新的计时圈数

代入式 (1) 计算角加速度 β_1 , 且 β_1 为负值, 代入式 (1) 得到刚体的转动惯量.

2.2 实验比较

本实验采用加速过程和减速过程同时测量的方式, 即砝码拉动塔轮转动 6 圈 (加速过程), 其后砝码脱落, 以后所测为减速过程, 一次共测塔轮转 19 圈的时间数据.

由于实验台高度仅有 70 cm 左右, 因而塔轮加速转 6 圈以后砝码落地, 前 6 圈为加速的角加速度, 6 圈以后为减速的情况, 而用式 (4) 计算的减速情况的结果仍为正值 (第 7, 8, 9, 10 圈), 可见, 减速情况下的角加速度不适用式 (4) 计算, 而应该用以下公式

$$\beta = \frac{4\pi[(j-m)(t_k-t_m)-(k-m)(t_j-t_m)]}{(t_k-t_m)(t_j-t_m)[(t_j-t_m)-(t_k-t_m)]}$$

其中 m 为开始减速的圈数. 同时, 为避免塔轮由加速转为减速的中间过程的计算误差, 将第 8 圈作为减速过程的计时零点和计时圈数起点. 计算结果见表 1 和表 2.

由表 1 及表 2 算得 $\beta_1 = 10.697\text{rad/s}^2$ (取前 5 圈数据, 舍去第 6 圈加减速变化过程的不稳定数据), $\beta_2 = 0.870\text{rad/s}^2$. 代入式 (8) 算得系统转动惯量为: $J_1 = 0.002\,625\text{kgm}^2$. 同理由表 3, 表 4 可算出系统

及待测圆盘的转动惯量为 $J_2 = 0.005\,969\text{kgm}^2$. 用不同质量的砝码拉动塔轮作实验, 实测待测圆盘的转动惯量及误差比较见表 5, 表 6.

表 2 空载载物台的转动时间与角加速度换算
($r = 1.5\text{ cm}$, $m = 210\text{ g}$, $j = k + 2$ 计算 β)

原圈数	原时间 /s	新圈数	新时间 /s	$\beta_1/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$	$\overline{\beta_1}/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$
8	2.412	0	0		
9	2.615	1	0.203	—	
10	2.819	2	0.407	—	
11	3.024	3	0.612	−0.742	
12	3.231	4	0.819	−0.915	
13	3.439	5	1.027	−1.012	−0.870
14	3.648	6	1.236	−0.893	
15	3.858	7	1.446	−0.828	
16	4.070	8	1.658	−0.872	
17	4.283	9	1.871	−0.907	
18	4.497	10	2.085	−0.851	
19	4.712	11	2.300	−0.810	

表 3 载物台及待测圆盘的转动时间与角加速度换算
($r = 1.5\text{ cm}$, $m = 210\text{ g}$)

圈数	时间 /s	$\beta_2/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$	$\overline{\beta_2}/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$
1	0.938	—	
2	1.539	4.881	
3	2.019	4.878	4.852
4	2.432	4.833	
5	2.800	4.814	

表 4 载物台及待测圆盘的转动时间与角加速度换算
($r = 1.5\text{ cm}$, $m = 210\text{ g}$, $j = k + 2$ 计算 β)

原圈数	原时间 /s	新圈数	新时间 /s	$\beta_2/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$	$\overline{\beta_2}/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$
8	3.746	0	0	—	
9	4.049	1	0.303	—	
10	4.354	2	0.608	—	
11	4.659	3	0.913	−0.298	
12	4.966	4	1.220	−0.220	
13	5.275	5	1.529	−0.321	−0.281
14	5.584	6	1.838	−0.290	
15	5.895	7	2.149	−0.259	
16	6.208	8	2.462	−0.303	
17	6.521	9	2.775	−0.283	
18	6.836	10	3.090	−0.263	
19	7.153	11	3.407	−0.290	

表 1 空载载物台的转动时间与角加速度换算
($r = 1.5\text{ cm}$, $m = 210\text{ g}$)

圈数	时间 /s	$\beta_2/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$	$\overline{\beta_2}/\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$
1	0.564	—	—
2	0.950	10.815	—
3	1.265	10.623	10.697
4	1.537	10.669	
5	1.780	10.680	
6	2.003	10.511	
7	2.210	10.436	
8	2.412	9.290	
9	2.615	7.734	
10	2.819	6.510	

表 5 测角加速度法测待测圆盘的转动惯量及误差
(待测圆盘 $M = 0.464\text{ kg}$, $D = 0.24\text{ m}$)

砝码质量 m/kg	系统转动惯量 J_1/kgm^2	系统及待测 圆盘转动惯量 J_2/kgm^2	待测圆盘 转动惯量 J/kgm^2	待测圆盘转动 惯量理论值 J_0/kgm^2	相对误差 $E/\%$
0.210	0.002 625	0.005 969	0.003 344		0.1
0.105	0.002 635	0.006 031	0.003 396	0.003 341	1.7
0.050	0.002 673	0.006 079	0.003 406		1.9

表 6 测时间法测转动惯量数据及误差 (待测圆盘转动惯量理论值 $J_0 = 0.3341 \text{ kgm}^2$)

	砝码质量 m/kg	塔轮转 5 圈 的时间 t/s	$\frac{1}{t^2}(\text{1/s}^2)$	转动惯量 $/\text{kgm}^2$	待测圆盘 转动惯量 kgm^2	相对误差 $E/\%$
塔轮系统	0.210	1.780	0.3156	0.001 178	0.002 903	13
	0.105	2.292	0.1904			
	0.050	3.647	0.0075			
塔轮系统	0.210	2.800	0.1276	0.004 081		
+	0.105	3.740	0.0715			
待测圆盘	0.050	5.320	0.0353			

由表 5 及表 6 数据可看出, 处理同一组实验数据, 测时间法的相对误差达 13%, 而测角加速度法的相对误差小于 2%, 可见测角加速度法的实验方案具有明显的优势.

3 不同测量步骤的测角加速度法的误差比较

以下采用 JM3 刚体转动惯量实验仪直接测角加速度.

方法 1: 分两次测量 β_1 和 β_2

用手转动实验仪, 测仪在摩擦力矩作用下的减速情况的角加速度 β_1 ; 用砝码拉动, 测在砝码拉动和摩擦力矩共同作用下的加速情况的角加速度 β_2 ;

方法 2: 一次测量完 β_1 和 β_2 , 用砝码拉动, 测在砝码拉动和摩擦力矩共同作用下的加速情况的角加速度 β_2 ; 待砝码脱落后, JM3 直接测量减速情况的角加速度 β_1 .

本实验经多次测量, 结果表明, 方法 1 的误差可高达 15%, 而且不稳定; 而方法 2 的相对误差不大于 2%. 原因是为保证摩擦力矩为常量, 必须保证加速减速过程的转速基本一致, 方法 1 因分为两次测量而无法保证转速一致的条件, 而方法 2 却能较有效地满足这一条件.

4 误差原因分析

测时间法产生误差的主要原因如下:

(1) 文献 [1] 指出测时间法中, 转动惯量

$$J = \frac{mgr^2t^2}{2h}$$

由误差理论知, 相对误差

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r} + 2\frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta h}{h}$$

其中, m, r, t 的相对误差很小, 在 0.1% 以下, 而下落高度 h 的偏差较大.

由文献 [1] 测时间法认为摩擦力矩为常量, 因而有以下方程:

由转动定律可得

$$Tr - M_\mu = J_1\beta \quad (5)$$

由牛顿第二定律可得

$$mg - T = ma \quad (6)$$

因为 $a \ll g$, 故

$$T = mg \quad (7)$$

砝码由静止到下落高度为 h 时所用时间为 t , 则 $h = \frac{1}{2}at^2$, $a = r\beta$. 在摩擦力矩与转速有关, 且在整个测量过程中是变量, 尤其在启动时的摩擦力矩远大于正常转动时的摩擦力矩的情况下, $h = \frac{1}{2}at^2$ 的计算公式不可信, 相对误差 $E = \frac{\Delta h}{h}$ 的大小与启动时的摩擦力矩有关, 变得无法估计. 测时间法产生误差的主要原因在于摩擦力矩尤其是启动时的摩擦力矩的无法估计.

(2) 必须确定刚体的初始角位移 $\theta_0 = 0$, 初始角速度 $\omega_0 = 0$. 由于计时器光电门有响应时间, θ_0 和 ω_0 都不可能为 0. 若半径 $r = 0.2 \text{ m}$, 起始点于测量点间的弧长大于 1 cm, 则 θ_0 将大于 3° .

(3) 而在测角加速度的方法中, $J = \frac{mgr}{\beta_1 + \beta_2} - mr^2\beta_2$. β_1, β_2 都是正常转动以后的测量值, 与启动时的摩擦力矩无关, 因而误差较小.

(4) 启动时的摩擦力矩的不确定性使得测时间法的误差很难估计, 实际常常高达 10% 甚至 70% 以上 [5], 而测角加速度法由于与启动时的摩擦力矩无关, 因而误差较小, 比测时间法的测量精度可提高 1 到 2 个数量级.

5 结 论

实验结果表明, 测角加速度法的实验方案比测时间法的实验方案具有明显的优势; 同时, 为保证测量精度, 要尽量保证测量过程中, 加速 β_2 和减速的 β_1 对应的转速 ω 不能差别太大.

参 考 文 献

- 1 廖少俊. 大学物理实验. 西安: 陕西科学技术出版社, 2000. 42~45 (Liao Shaojun. College Physical Experiment. Xi'an: Shan'xi Science & Technology Press, 2000. 42~45 (in Chinese))
- 2 蔡静等. 用气垫摆测物体的转动惯量. 物理实验, 2000, 20(6): 7~8 (Cai Jing, et al. Measurement of rigid body inertia by air-cushion turntable. *Experiment in Physics*, 2000, 20(6): 7~8 (in Chinese))
- 3 李鸿儒. 用落体法测定转动惯量. 凿岩机械气动工具, 2002(2): 24~28 (Li Hongru. Measurement to rigid body inertia by the falling body law. *Journal of Charge and Air Tools*, 2002(2): 24~28 (in Chinese))
- 4 宋超等. 用三线摆方法测试物体转动惯量的误差问题. 力学与实践, 2003, 25(1): 59~60 (Song Chao, et al. Error of rigid body inertia measurement by trilinear pendulum. *Mechanics in Engineering*, 2003, 25(1): 59~60 (in Chinese))
- 5 孟泉水等. 用复摆法测刚体转动惯量. 西安科技学院学报, 2003, 23(4): 478~480 (Meng Quanshui, et al. Measuring the rotational inertia of rigid body with the method of compound pendulum. *Journal of Xi'an Science & Technology College*, 2003, 23(4): 478~480 (in Chinese))
- 6 郭长立. 实验法测定刚体转动惯量研究. 西北大学学报, 2002(增): 160~164 (Guo Changli. Research on measurement of inertia of rigid body by experimental method. *Journal of North-West University*, 2002(s): 160~164 (in Chinese))
- 7 陈淑清. 用气垫转盘测转动惯量的数据处理及误差分析. 物理实验, 2003, 22(3): 13~15 (Chen Shuqing. Date processing and error analysis in measuring moment of inertia with air-cushion turntable. *Experiment in Physics*, 2003, 22(3): 13~15 (in Chinese))

COMPARISON OF DIFFERENT METHODS OF MEASURING RIGID BODY INERTIA BY THE FALLING BODY LAW

GUO Changli

(Department of Basic Courses of Xi'an Science and Technology University, Xi'an 710054, China)

LI Sanqing

(Department of Architecture Engineering, Xi'an Institute of Technology, Xi'an 710032, China)

Abstract This paper calculates the inertia of a disc by angular acceleration law and time law, respectively with the data of JJJG-I's rigid body inertia experimental apparatus, and it is indicated that the angular acceleration law gives better results than the time law by 1 to 2 orders of magnitude in precision. The main factors of the time law and the angular acceleration law are pointed out.

Key words rotational inertia, angular acceleration, time, the relative error

(上接第 42 页)

and electrical loads are given. The unknown functions are the discontinuities of the elastic displacements and electrical potential of the crack surface. Then, a numerical technique to solve the hypersingular integral equations is proposed based on the boundary element method combined with the finite-part integral method. Finally, a rectangular crack under mechanical tension and electrical fields is analyzed, and the numerical results of the stress and electric displacement intensity factors are presented. It is shown that the numerical solutions are satisfactory, which shows that the present approach is powerful to solve three-dimensional crack problems of piezoelectric materials.

Key words piezoelectric material, hypersingular integral equation, boundary element method, stress intensity factor, electric displacement intensity factor