

不超过允许范围时, 系统可再次离地跳起. 但若无能量补充, 运动幅度将逐次减小, 直至跳跃停止. 离地速度愈大, 能量损失愈严重.

(3) 若能在着地后的约束阶段内, 在二刚性块之间施加脉冲以弥补质心速度损失, 则有可能实现不衰减的连续跳跃. 夯土机的脉冲利用燃气实现.

(4) 无冲击跳跃不可能藉质量-弹簧系统的被动元件实现. 在腾空阶段内若能采用主动控制方法调整二刚性块之间的相对运动, 以保证着地时刻足的绝对速度等于或接近于零, 则无冲击或弱冲击跳

跃才有可能实现. 对于跳跃动物, 这种调整通过腿部肌肉实现.

参 考 文 献

- 1 Raibert M H. Legged Robots That Balance, MIT Press, 1985
- 2 Blickhan R. The spring-mass model for running and hopping. *J Biomechanics*, 1989, 22(11/12):1217
- 3 刘延柱. 跳跃运动的动力学解释. 上海力学, 1986(2): 21

(本文于 1994 年 5 月 23 日收到)

非牛顿流体的广义 Maxwell 模型及其解

刘 慈 群

(渗流流体力学研究所, 廊坊 102801)

摘要 引进带分数阶导数的广义 Maxwell 模型和 Voigt 模型; 用 Laplace 变换正、反演算法, 给出了非牛顿流体应力松弛和蠕变近似解析解. 分数阶 $0 < \alpha \leq 1$ 表征了其衰减或增长的变化特性. 这是一种研究分数阶导数流变学的分析、计算方法.

关键词 非牛顿流体, 黏弹性, 分数阶导数, Laplace 变换

1 引 言

非牛顿流体如聚合物水溶液, 具有松弛和蠕变等黏弹性性质. 传统的流变学, 用整数阶导数的 Maxwell 模型和 Voigt 模型, 研究其松弛和蠕变特征. 60 年代以来的文献, 用分数阶导数研究非牛顿流体的黏弹性特征^[1,2], 并得到聚合丁二烯溶液符合 $\alpha = 0.525$ 的 Maxwell 模型, 下面用 Laplace 变换方法, 得出其解和图表.

2 广义 Maxwell 模型

非牛顿流体的松弛特性即: 黏弹性形变保持不变, 应力随时间衰减的特征; 描述其动态的广义 Maxwell 模型^[1,2] 为

$$\sigma(t_D) + D^\alpha[\sigma(t_D)] = 0 \quad (1)$$

亦可写成

$$\sigma'(t_D) + D^\alpha[\sigma'(t_D)] = \sigma_0$$

初始条件

$$t_D = 0, \quad \sigma = \sigma_0 \quad (2)$$

或

$$\sigma'(0) = 0$$

式中分数阶导数的定义为^[1]

$$D^\alpha[\sigma'(t_D)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt_D} \int_0^{t_D} \frac{\sigma'(\tau)}{(t_D - \tau)^\alpha} d\tau \quad (3)$$

这里, σ 为应力; σ_0 为初始应力; $\sigma' = \sigma - \sigma_0$ 为应力差; t 为时间; $t_D = t/\theta$ 为无量纲时间; θ 为与黏弹性有关的广义松弛时间; $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数.

从而式 (1) 的 Laplace 变换为

$$\bar{\sigma}_D = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \frac{1}{S(1 + S^{-\alpha})} \quad (4)$$

式中分数阶导数 Laplace 变换为

$$L \cdot D^\alpha[\sigma'(t_D)] = S \frac{L \cdot \sigma'(t_0)}{S^{1-\alpha}} = S^\alpha \cdot \bar{\sigma}'(s) \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}(S) = \int_0^\infty \sigma(t_D) \cdot e^{-St_D} \cdot dt_D = L\sigma(t_D) \quad (6)$$

近似 Laplace 变换解析反演公式^[3] 为

$$\sigma_D(t_D) = S \cdot \bar{\sigma}_D(S) \Big|_{S=1/wt_D} \quad (7)$$

式中 w 为校正系数, S 为 Laplace 空间变量.

将式(4)代入式(7)得近似松弛函数

$$\sigma_D(t_D) = \frac{1}{1 + (wt_D)^\alpha} \quad (8)$$

已知 Womesley 数 β 很小, $\alpha = 1$ 时的松弛函数(见附录 A)

$$\sigma_D(t_D) = e^{-t_D} \quad (9)$$

根据 $t_D = 0.69, \sigma_D = 1/2$, 从式(8)和(9)得 $w = 1.4$.

松弛函数式(8)表明: (1) 对任意值 $0 < \alpha \leq 1$, 应力都从初始值衰减至零; (2) 分数阶 α 愈小应力衰减愈慢; (3) $\alpha = 1$, 应力松弛最快.

王晓冬工程师根据 Stefest 数值反演方法, 由式(4)在微机上计算和绘制了应力松弛曲线(图1). 数值结果与近似分析的定性结果是一致的, 如在 $t_D = 0.69$ 处, $\sigma_D = 0.5$. 它全面地反映 α 对松弛曲线的影响.

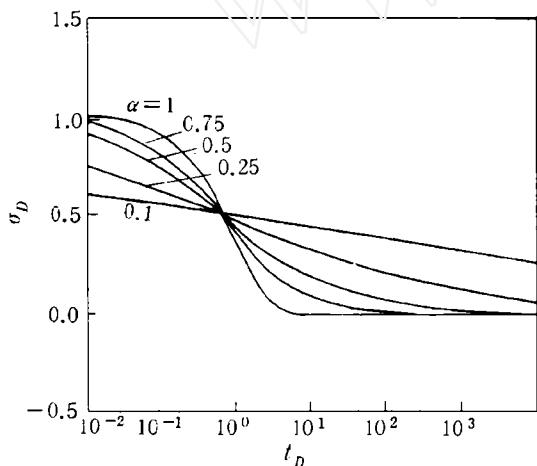


图1 应力松弛曲线

3 广义 Voigt 模型

非牛顿流体蠕变特性指, 应力保持不变, 形变随时间增长的特征. 描述其动态的广义 Voigt 模型为

$$\varepsilon(t_0) + D^\alpha[\varepsilon(t_D)] = \frac{\sigma_0}{E} = \varepsilon_0 \quad (10)$$

式中 ε 为形变; E 为弹性模量; ε_0 为终形变.

式(10)的 Laplace 变换

$$\bar{\varepsilon}(S) = \frac{\varepsilon_0}{S(1 + S^\alpha)} \quad (11)$$

式中

$$\bar{\varepsilon}(S) = \int_0^\infty \varepsilon(t_D) \cdot e^{-st_D} dt_D$$

将式(11)代入式(7)得近似蠕变函数

$$\varepsilon_D(t_D) = \frac{\varepsilon(t_D)}{\varepsilon_0} = \frac{(wt_0)^\alpha}{1 + (wt_D)^\alpha} \quad (12)$$

上式表明: 形变 ε 随着时间的增加从 0 变到最大值 ε_0 , 分数阶 α 值愈小形变增长率愈小.

4 结论

(1) 给出了非牛顿流体分数阶应力松弛函数和蠕变函数. 已有的 $\alpha = 1$ 的结果, 是其特例.

(2) 分数阶 $0 < \alpha \leq 1$, 表征了松弛或蠕变速度的减缓特征.

(3) Laplace 变换方法是研究分数阶导数的流变学的有力工具.

附录 A $\alpha = 1$ 时松弛振荡函数

Maxwell 松弛-振荡模型(总形变为余弦函数)

$$\sigma_D + \frac{d\sigma_D}{dt_D} = \frac{\dot{\varepsilon}}{dt_D} \cos(\beta^2 t_D) \quad (A1)$$

式中

$$\sigma_D = \frac{\sigma}{\sigma_0}, t_D = \frac{t}{\theta}, \beta^2 = \omega \cdot \theta$$

ω 为余弦函数频率.

初始条件

$$t_D = 0, \sigma_D = 1 \quad (A2)$$

式(1)和(2)的解是

$$\sigma_D(t_D) = \frac{\beta^4}{1 + \beta^4} \left[\cos(\beta^2 t_D) - \frac{1}{\beta^2} \sin(\beta^2 t_D) \right] + \frac{1}{1 + \beta^4} e^{-t_D} \quad (A3)$$

松弛-振荡函数式(3)反映应力衰减-振荡全过程. 当 $t_D \gg 1$ 后, 式(3)简化为振荡过程

$$\sigma_D(t_D) \approx \frac{\beta^4}{1 + \beta^4} \left[\cos(\beta^2 t_D) - \frac{1}{\beta^2} \sin(\beta^2 t_D) \right] \quad (A4)$$

当 Womesley 数 β 很大时, 式(4)进一步简化为与形变余弦振荡同步的应力函数

$$\sigma_D(t_D) \approx \cos(\beta^2 t_D) \quad (A5)$$

从上可知: 黏弹性主要在松弛时间 θ 范围内起作用. 超过后, 非牛顿性将逐渐消失.

参考文献

- 1 Bagley R L et al. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J Rheol*, 1983, 27(3): 201-210

圆柱体中同心内埋圆片裂纹表面加载的应力强度因子

王 启 智

(重庆大学资环学院, 重庆 630044)

摘要 本文用裂纹(延伸)面应力场方法分析了圆柱体中同心内埋圆片裂纹表面受拉或扭的几种受力情况的应力强度因子. 对整个裂纹表面均匀拉伸时的解与经典的数值解吻合很好, 显示出所用方法的简便和可靠. 得到的几个解都有良好的工程应用前景.

关键词 断裂力学, 应力强度因子, 裂纹面应力场方法, 圆片裂纹

1 引言

应力强度因子是进行线弹性断裂力学分析的重要参数, 尽管一些应力强度因子手册已提供了数百个解, 但仍有不少工程问题找不到现成的解可以利用.

Morozov 等人曾提出一种分析应力强度因子的近似方法^[1]. 将已知的无限大板(体)中裂纹延伸线(面)的应力加以适当的修正, 就近似地获得有限板(体)对应的应力场, 再用平衡条件导出修正系数, 此系数就是后者的无量纲应力强度因子. 显然, 易志坚也独立地提出了这一方法^[2]. 在文^[2]的启发下本人做了一些工作^[3,4], 用上述方法求出了圆柱体中同心内埋圆片裂纹在3种工况(图1, 图2, 图3)下的应力强度因子, 其中一种简化情况的解与经典的数值解^[5]吻合很好, 显示了方法的简便和结果的可靠.

2 在裂纹表面的一个圆面积上均匀拉伸

在图1中, 让 $b \rightarrow \infty$, 这就是无限大体的情况, 此时其裂纹延伸面 ($z = 0, r > a$) 上的应力分

量 σ_z 已由文^[6]给出

$$\sigma_z = \frac{2P_0}{\pi} \left[\frac{a - \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \arctan \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2}{r^2 - a^2}} - \arctan \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right] \quad (r > a) \quad (1)$$

式中 P_0 是拉应力, ε 是施力的圆半径, $\varepsilon \leq a$, a 是圆片裂纹的半径, r 是到圆心的距离.

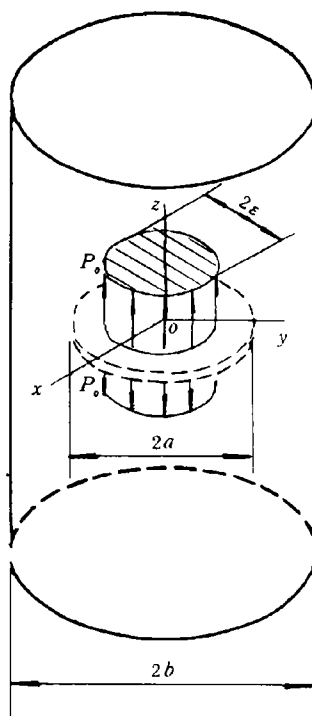


图1 部份圆面积上均匀拉伸