

从例子可以看出外推法在大型动力计算中会明显地节省计算时间, 精度却不降低.

[1] Dokainish M A et al. A survey of direct time integra-

[3] Bathe K J, Wilson E L. 有限元分析中数值方法 (林公豫等译). 科学出版社, 1985

环件闭式轧制力和力矩上限计算

(武汉工学院 39 信箱, 武汉 430070)

关键词 环件轧制, 轧制力, 轧制力矩, 上限法

环件轧制又称辗扩或扩孔,是一种特殊轧制工艺,广泛用于生产各种环形零件和毛坯.按轴向变形是否有孔型限制分,环件轧制有开式和闭式两类,其中闭式轧制轴向变形受孔型侧壁限制.环件闭式轧制成形如图1所示,驱动辊作旋转运动,芯辊作进给运动,环件在驱动辊和芯辊作用下反复通过高度逐渐减小的孔型,产生连续局部变形即壁厚减小、内外径增大.显然,轧制力和力矩计算对于环件轧制工艺设计和轧环机设计都是很重要的.国内有关设计手册^[1,2]都只给出了轧制力计算式,而没有给出力矩计算式.其中文献[1]中轧制力公式为一经验公式,经验系数取值范围大,不便准确选取;文献[2]中轧制力公式为滑移线理论所导出,但未给出公式中压力因子数值,实际上无法使用.此外,国内轧环机生产厂在设计轧环机时还常引用文献[3]的轧制力和力矩计算式.与国外使用的文献[4]中的环件轧制力和力矩计算式比,文献[3]中的轧制力经验公式较简单,但轧制力矩计算公式较复杂,且相同条件下其轧制力矩计算值比文献[4]的大出几倍.文献[4]中的环件轧制力和力矩计算式由有限高

2. 动可容速度场构造

参看图 1, 环件闭式轧制中因其轴向受到孔型限制, 所以轴向变形很小, 可以看作平面应变问题.

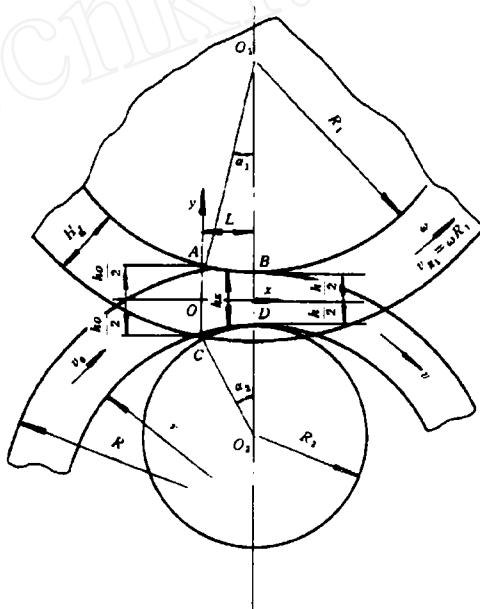


图 1 环件闭式轧制成形简图

环件轧制变形区为 $ABDC$, AC 和 BD 分别为变形区的入口和出口边界, 上边界 AB 和下边界 CD 分别为环件与驱动辊和芯辊的接触弧. 环件轧制中接触弧长与驱动辊半径 R_1 和芯辊半径 R_2 相比是很小的, 接触弧可近似用弦代替. 以变形区高度中线为 x 轴, 以入口边界为 y 轴建立坐标系, 则变形区上、下边界方程为

$$\left. \begin{aligned} AB: y = f(x) &= \frac{h_0}{2} - \frac{h_0 - h}{2L}x \\ CD: y = -f(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, h_0, h 分别为变形区入口和出口高度, L 为接触弧长在进给方向的投影. 设变形区入口和出口截面法向流速分别为 v_0 和 v , 横坐标为 x 处的截面高度为 h_x , x 向流速为 v_x , 则由变形区任一截面金属流量不变条件得

$$v_x = \frac{v_0 h_0}{h_x} = \frac{v_0 h_0}{2} \frac{1}{f(x)} \quad (2)$$

设 x 截面的 y 向流速为 v_y , 则由变形区体积不变条件 $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ 及式 (1) 得

$$v_y = \frac{v_0 h_0}{2} \frac{f'(x)}{f^2(x)} y + c(x) \quad (3)$$

在变形区上下边界, 金属相对轧辊滑动而不开轧辊, 也就是边界速度方向沿着边界切向即 $\frac{v_y}{v_x} \Big|_{y=f(x)} = \frac{df}{dx}$, 将式 (2)、(3) 代入此式得 $c(x) = 0$, 于是变形区动可容速度场为

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{v_0 h_0}{2} \frac{1}{f(x)} \\ v_y &= \frac{v_0 h_0}{2} \frac{f'(x)}{f^2(x)} y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由此动可容速度场所决定的应变速率场为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{v_0 h_0}{2} \frac{f'(x)}{f^2(x)} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{v_0 h_0}{2} \frac{f'(x)}{f^2(x)} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{v_0 h_0}{2} \frac{(f'(x))^2}{f^3(x)} y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

3. 上限功率计算

根据上限原理有

$$\dot{W} \leq \dot{W}^* = \dot{W}_i^* + \dot{W}_s^* + \dot{W}_f^* \quad (6)$$

式中, $\dot{W}$ 和 $\dot{W}^*$ 分别为塑性变形的真实功率和上限功率, $\dot{W}_i^*, \dot{W}_s^*$ 和 $\dot{W}_f^*$ 分别为纯塑性变形上限功率、速度间断面剪切上限功率和工件与模具接触面摩擦上限功率. 下面针对环件轧制分别计算这些功率.

3.1 纯塑性变形功率

平面应变中, 纯塑性变形功率^[5]为

$$\dot{W}_i^* = 2K \int_V \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + 2\dot{\gamma}_{xy}^2)} dV$$

式中, K 为材料剪切屈服强度, V 为变形体体积. 将式 (5) 代入上式积分得

$$\begin{aligned} \dot{W}_i^* &= 2K v_0 h_0 \frac{L}{h_0 - h} \ln \frac{h}{h_0} \left(f'(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right. \\ &\quad \left. + \ln(f'(x) + \sqrt{1 + (f'(x))^2}) \right) \end{aligned}$$

式中, b 为环件轴向宽度. 考虑到 $f'(x) = -\frac{h_0 - h}{2L} < 1$, 代入上式进行近似计算得

$$\dot{W}_i^* = 2K v_0 h_0 b \ln \frac{h_0}{h} \quad (7)$$

3.2 速度间断面剪切功率

速度间断面位于变形区入口和出口边界处, 其间断速度分别为 $\Delta v_1 = v_y \Big|_{x=0}, \Delta v_2 = v_y \Big|_{x=L}$, 于是速度间断面剪切功率为

$$\dot{W}_s^* = \int_{S_1} K |\Delta v_1| ds + \int_{S_2} K |\Delta v_2| ds$$

式中, S_1, S_2 分别为变形区入口和出口截面积. 根据式 (4) 得出速度间断面的间断速度代入上式积分得

$$\dot{W}_s^* = \frac{1}{2} K v_0 h_0 b \frac{h_0 - h}{L} \quad (8)$$

3.3 摩擦功率

环件闭式轧制中摩擦发生在与轧辊接触的内外表面和与孔型侧壁接触的两个端面.

3.3.1 内外表面摩擦功率

一般来说, 内外表面的摩擦状况不同, 摩擦功率亦不等, 但考虑到驱动辊线速度 v_{R1} 与芯辊 (从动辊) 线速度不会相差很多以及变形区上下边界相差很小, 所以为了便于计算, 近似取内、外表面摩擦功率相等. 设变形区上边界中性面位于 $x = L_n$ 处, 则内、外表面摩擦功率为

$$\begin{aligned} \dot{W}_{f1}^* &= 2 \left(\int_0^{L_n} mK (v_{R1} - v \Big|_{y=f(x)}) b \frac{dx}{\cos \alpha_1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{L_n}^L mK (v \Big|_{y=f(x)} - v_{R1}) b \frac{dx}{\cos \alpha_1} \right) \end{aligned}$$

式中, m 为摩擦因子; α_1 为驱动辊接触角; $v|_{y=f(x)}$ 为变形区上边界的速度, 且 $v|_{y=f(x)} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}|_{y=f(x)}$. 根据式 (4) 得出 $v|_{y=f(x)}$ 代入 $\dot{W}_{f1}^*$ 积分得

$$\begin{aligned} \dot{W}_{f1}^* = & 2mKb(v_{R1}(2L_n - L) \\ & + v_0 h_0 \sqrt{1 + \left(\frac{h_0 - h}{2L}\right)^2} \\ & \cdot \frac{L}{h_0 - h} \ln \frac{(h_0 - \frac{h_0 - h}{L} \ln)^2}{h_0 h}) \end{aligned}$$

考虑到 $\frac{h_0 - h}{L} \ll 1$ 及 $\frac{h_0 - h}{h_0} \ll 1$ 对上式近似计算得

$$\dot{W}_{f1}^* = 2mKbv_{R1} \left(1 - \frac{v_0}{v_{R1}}\right) (2L_n - L) \quad (9)$$

3.3.2 两端面摩擦功率

环件轧制中, 其端面与孔型侧壁接触面如图 2 所示. 在变形区入口以左和出口以右的区域 S_1 和 S_2 上, 环件不发生塑性变形亦即无轴向宽展趋势, 因而这两区域环件受孔型侧壁压力是很小的, 按照库仑摩擦定律其上的滑动摩擦力就更小了, 所以这两区域的摩擦功率可略去不计. 参看图 2, 在变形区 $ABDC$ 中, 与之接触的孔型侧壁的速度分布为

$$\left. \begin{aligned} v_{\rho x} &= \omega \rho \cos \varphi \\ v_{\rho y} &= -\omega \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

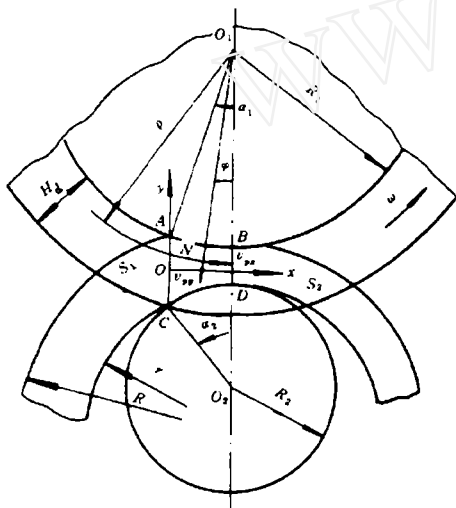


图 2 环件端面与孔型侧壁接触面

式中, $v_{\rho x}, v_{\rho y}$ 分别为孔型侧壁上位于塑性区一点 N 的速度在 x, y 方向的分量, ω 为驱动辊角速度, ρ, φ 分别为 N 点的极半径和极角且 $R_1 \leq \rho \leq R_1 + H_d, 0 \leq \varphi \leq \alpha_1$ (图 2). 因两端面摩擦状况相同, 所以端面摩擦功率 $\dot{W}_{f2}^*$ 为

$$\dot{W}_{f2}^* = 2 \int_{S_f} mK \sqrt{(v_x - v_{\rho x})^2 + (v_y - v_{\rho y})^2} ds$$

式中, S_f 为变形区面积. 上式为一非负函数积分, 被积函数比较复杂, 难于直接积分. 为了计算方便, 用各速度分量的平均值进行近似积分得

$$\dot{W}_{f2}^* = 2mK \sqrt{(\bar{v}_x - \bar{v}_{\rho x})^2 + (\bar{v}_y - \bar{v}_{\rho y})^2} S_f$$

由式 (4) 得

$$\bar{v}_x = \frac{v_0}{2} \left(1 + \frac{h_0}{h}\right), \bar{v}_y = 0$$

由式 (10) 得

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\rho x} &= \omega \bar{\rho} \cos \bar{\varphi} = \omega \left(R_1 + \frac{H_d}{2}\right) \cos \frac{\alpha_1}{2} \\ &\approx \omega R_1 \left(1 + \frac{H_d}{2R_1}\right) \approx v_{R1} \\ \bar{v}_{\rho y} &= -\omega \bar{\rho} \sin \bar{\varphi} = -\omega \left(R_1 + \frac{H_d}{2}\right) \sin \frac{\alpha_1}{2} \\ &\approx -\omega R_1 \left(1 + \frac{H_d}{2R_1}\right) \frac{\alpha_1}{2} \approx -v_{R1} \frac{L}{2R_1} \end{aligned}$$

又 $S_f = \frac{h_0 + h}{2} L$, 将各参数代入 $\dot{W}_{f2}^*$ 中整理得

$$\begin{aligned} \dot{W}_{f2}^* = & 2mK(h_0 + h)Lv_{R1} \\ & \cdot \sqrt{\left(\frac{v_0}{2v_{R1}} \left(1 + \frac{h_0}{h}\right) - 1\right)^2 + \left(\frac{L}{2R_1}\right)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

在中性面 $x = L_n$ 处, 轧辊速度等于变形区金属流动速度, 亦即 $v_{R1} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}|_{x=L_n, y=f(L_n)}$, 将式 (4) 代入整理得

$$v_0 = v_{R1} \left(1 - \frac{h_0 - h}{h_0} \frac{L_n}{L}\right) \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (7)、(8)、(9)、(11) 得到各功率分量, 然后求和得总的上限功率 $\dot{W}^*$ 为 L_n 的函数. 对上限功率求极值可得 $L_n \approx \frac{3}{4}L$, 相应的最小上限功率 $\dot{W}_{\min}^*$ 为

$$\dot{W}_{\min}^* = 2Kv_{R1}b\Delta h \left(1 + \frac{1}{4} \frac{h_0}{L} + \frac{3}{8} m \frac{L}{h_0} + \frac{3}{4} m \frac{L}{b}\right) \quad (13)$$

式中, Δh 为环件轧制中每转压下量(进给量)且 $\Delta h = h_0 - h$. 若以纯塑性变形功率为 1, 则式(13)中括号内的第二项至第四项数值分别代表塑性剪切功率、内外表面摩擦功率和端面摩擦功率所占的份额. 显然, 在厚壁大宽度环件轧制即 $\frac{L}{h}$ 和 $\frac{L}{b}$ 很小时, 摩擦功率所占份额是很小的.

4. 轧制力矩、力计算

环件轧制的外力功率主要由驱动辊提供. 设驱动辊的转动扭矩为 M , 则外力功率 $\dot{W} = M\omega = M\frac{v_{R_1}}{R_1}$, 将 $\dot{W}$ 和 $\dot{W}_{\min}^*$ 代入式(6)得

$$M = 2KbR_1\Delta h\left(1 + \frac{1}{4}\frac{h_0}{L} + \frac{3}{8}m\frac{L}{h_0} + \frac{3}{4}m\frac{L}{b}\right) \quad (14)$$

环件轧制中受到驱动辊和芯辊的压力处于平衡状态, 即驱动辊和芯辊对环件的作用力大小相等、方向相反, 且作用在一条直线上. 因芯辊为空转辊, 不能承受扭矩, 其对环件的合力作用点应位于接触弧中点. 同时考虑到驱动辊和芯辊轴承摩擦很小, 可予以忽略, 于是由环件受力平衡条件得环件轧制中驱动辊力臂 $l^{[6]}$ 为

$$l = (R_1 + R_2 + R - r) \sin \frac{\alpha^2}{2} \approx (R_1 + R_2 + R - r) \frac{L}{2R_2}$$

式中 R, r 分别为环件外圆和内孔半径. 于是环件轧制力 $P = \frac{M}{l}$, 将 M, l 代入, 同时考虑到接触弧长

在进给方向投影 $^{[4]}L \approx \sqrt{\frac{2R_1R_2\Delta h}{R_1 + R_2}}$ 得

$$P = 2KbL\left(1 + \frac{1}{4}\frac{h_0}{L} + \frac{3}{8}m\frac{L}{h_0} + \frac{3}{4}m\frac{L}{b}\right) \quad (15)$$

单位面积平均轧制力 p 为

$$p = \frac{P}{bL} = 2K\left(1 + \frac{1}{4}\frac{h_0}{L} + \frac{3}{8}m\frac{L}{h_0} + \frac{3}{4}m\frac{L}{b}\right) \quad (16)$$

5. 实验验证

本文引用文献[4]的环件轧制实验结果对上述理论公式进行检验. 有关轧制参数为: 驱动辊半径 $R_1 = 104.8\text{mm}$, 芯辊半径 $R_2 = 34.9\text{mm}$, 环件轴向宽度 $b = 25.4\text{mm}$, 环件材料为铝合金 HE30WP(英国牌号), 屈服强度 $\sigma_s = 356.5\text{N/mm}^2$ (剪切屈服强度 $K = \frac{\sigma_s}{2}$). 试样原始参数、轧制后参数、实测和按本文公式计算的轧制力和力矩如表 1 所示. 表中 D_i, H_i 分别为环件原始外径和壁厚, D_f, H_f 分别为环件轧制后外径和壁厚, n 为驱动辊转速, f 为轧制进给速度, P_e, P_t 分别为实测和理论轧制力, M_e, M_t 分别为实测和理论轧制力矩. 理论值计算中所需的每转压下量 $^{[4]}\Delta h = \frac{f}{n} \frac{R}{R_1}$, 铝合金轧制摩擦因子 $^{[6]}m = 0.2$. 从表中看出, 轧制力的理论值比实测值约大 10~20%, 轧制力矩的理论值比实测值约大 20~30%, 且相对误差的稳定性较好, 这表明本文的环件轧制力和力矩的上限解对于工程设计是适用的.

表 1 环件轧制实验和理论计算数据

试样	D_i (mm)	H_i (mm)	n (r/min)	f/n (mm/r)	D_f (mm)	H_f (mm)	P_e (N)	P_t (N)	$(P_t - P_e)/P_e$ (%)	M_e (Nm)	M_t (Nm)	$(M_t - M_e)/M_e$ (%)
1	123.83	22.23	30	0.457	157.32	15.98	68300	76286	11.7	495.3	646.7	30.6
2	123.83	22.23	180	0.457	157.16	16.00	67400	76286	13.2	523.2	646.7	23.6
3	123.83	22.23	160	0.330	157.56	15.95	62300	69972	12.3	393.7	505.2	28.3
4	98.43	9.50	30	0.483	229.01	3.76	52700	62632	18.8	500.4	658.9	31.7
5	111.13	15.90	30	0.483	166.70	9.63	53400	64824	21.4	454.7	582.3	28.1

6. 结 论

(1) 本文导出了环件闭式轧制力矩、力和单位轧制力的上限计算式(14)、(15)、(16), 并与环件轧制实验结果作了比较.

(2) 厚壁大宽度环件闭式轧制中摩擦功率所占份额很小, 因而对轧制力和力矩的影响很小.

(3) 与文献[4]比, 本文的环件轧制力和力矩计算公式无待定参数, 使用方便, 计算精度对于工

程设计是适用的.

参 考 文 献

- [1] 锻工手册编写组. 锻工手册, 北京: 机械工业出版社, 1973, 7-118
- [2] 锻压技术手册编委会. 锻压技术手册, 北京: 国防工业出版社, 1989, 1306-1307
- [3] 卢刚. 轴承套圈毛坯扩孔的力学计算. 轴承, 1978 (4):

- [4] Hawkyard J B et al. Analyses for roll force and torque in ring rolling with some supporting experiments. *Int J Mech Sci*, 15(11): 873-893
- [5] 赵志业. 金属塑性变形与轧制理论, 北京: 冶金工业

- [6] 采力柯夫A И. 轧钢机力参数计算理论, 北京: 中国工业出版社, 1965: 256-258, 293

(本文于 1993 年 7 月 24 日收到)

关于 Kelvin 问题

刘 延 柱

(上海交通大学, 上海 200030)

摘要 本文讨论粗糙平面上带椭球形腔全充理想有旋流体的刚性椭球体绕直立的极轴旋转的稳定性, 导出解析形式稳定性判据, 从而对 Kelvin 问题作出理论解释.

关键词 Kelvin 问题, 充液系统, 动力稳定性

1. 引 言

1877 年 Lord Kelvin 提出的熟鸡蛋可在平面上直立旋转而生鸡蛋不能的所谓 Columbus 蛋现象^[1]吸引了包括 Greenhill(1880), Жуковский(1885), Poincaré(1910), Четаев(1957), Румянцев(1965), Parks(1979) 等人在内的力学家的注意. 熟鸡蛋的最早解释出现于 1903 年^[2,3], 作者的解释考虑了库仑摩擦的非线性特性^[7]. 生鸡蛋问题, 即平面上旋转的薄壁充液容器当外形稍趋扁平时稳定, 稍趋细长时不稳定的现象, 自 1880 年至今已发表了多篇理论解释文章. 也曾引起我国学术界的兴趣和争论^[4-6]. 作者曾利用 Fleiffer 方法分析平面上旋转的充液陀螺的稳定性^[8-10], 导出解析形式的稳定性判据. 本文的目的是以简明的数学工具讨论 Kelvin 问题, 分析粗糙平面上旋转的带椭球充液腔的刚性椭球, 当液体成分从零开始逐渐增大时, 其运动性态的演变过程. 从而对 Kelvin 问题作出更清晰的理论解释.

2. 动力学方程

设轴对称均质刚性椭球带有形状相似的同心椭球腔, 腔内充满理想有旋不可压缩流体, 在粗糙平面上滚动(图 1). 以固定点 O_0 为原点建立参考坐标系 $(O_0-X_0Y_0Z_0)$, X_0 、 Y_0 轴沿支承平面, Z_0 为垂直轴. 以椭球质心 O 为原点建立与 $(O_0-X_0Y_0Z_0)$

平行的平动坐标系 $(O-XYZ)$ 绕 X 轴转过 θ 角, 再绕 Y 轴的新位置转过 ψ 角后的位置为 $(O-xyz)$, z 轴沿椭球的对称轴. $(O-xyz)$ 绕 z 轴转过 φ 角后与椭球的连体坐标系重合(图 2). z 轴在 Z 轴附近时, 卡尔丹角 θ 、 ψ 为无限小量. 设椭球的赤道半

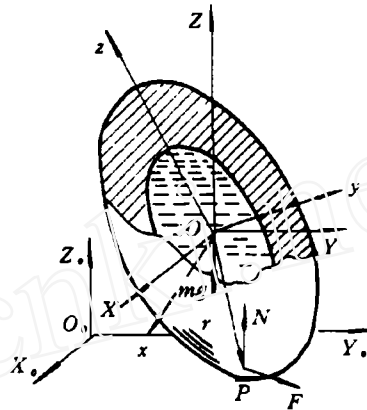


图 1

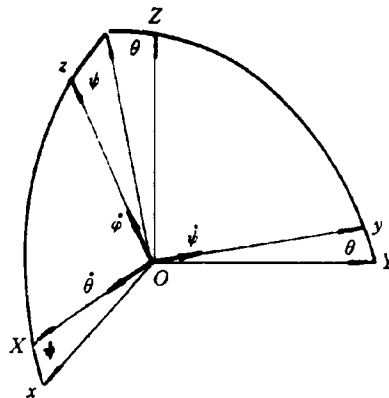


图 2