两类动点相对轨迹间的关系

吴 予 明

（江 西 冶 金 学 院）

在点的复合运动分析中，理论上可选择的动点有两类：一类是取在运动过程中始终为相关点（即连接点或接触点）的点为动点，我们称之为第一类动点，用M表示；另一类是只在运动的某一瞬时为相关点的点为动点，我们称之为第二类动点，用N表示。本文从普遍情况出发，阐述两类动点相对轨迹间的一般关系。

在两个运动刚体上分别固连坐标系 $o_1x_{F1}x_{F2}x_{F3}$ 和 $o_2x_{T1}x_{T2}x_{T3}$，它们都随刚体运动，因此都是动系，分别称为动系 I 和动系 II。再取固定参考系 $ox_1x_2x_3$（图 1）。

记固定坐标系、动系 I 和动系 II 的单位向量基分别为 $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，$\boldsymbol{e}_f=[\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3]$ 和 $\boldsymbol{e}_t=[\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3]$，各单位向量基之间的变换关系为

$$\boldsymbol{e}_f=\boldsymbol{e}\boldsymbol{F} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{e}_t=\boldsymbol{e}\boldsymbol{T} \qquad (2)$$

其中

$$\boldsymbol{F}=[F_{ij}]=[\boldsymbol{f}_j\cdot\boldsymbol{e}_i]$$

$$\boldsymbol{T}=[T_{ij}]=[\boldsymbol{t}_j\cdot\boldsymbol{e}_i] \quad (i,j=1,2,3)$$

它们都是正交矩阵，即满足

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}$$

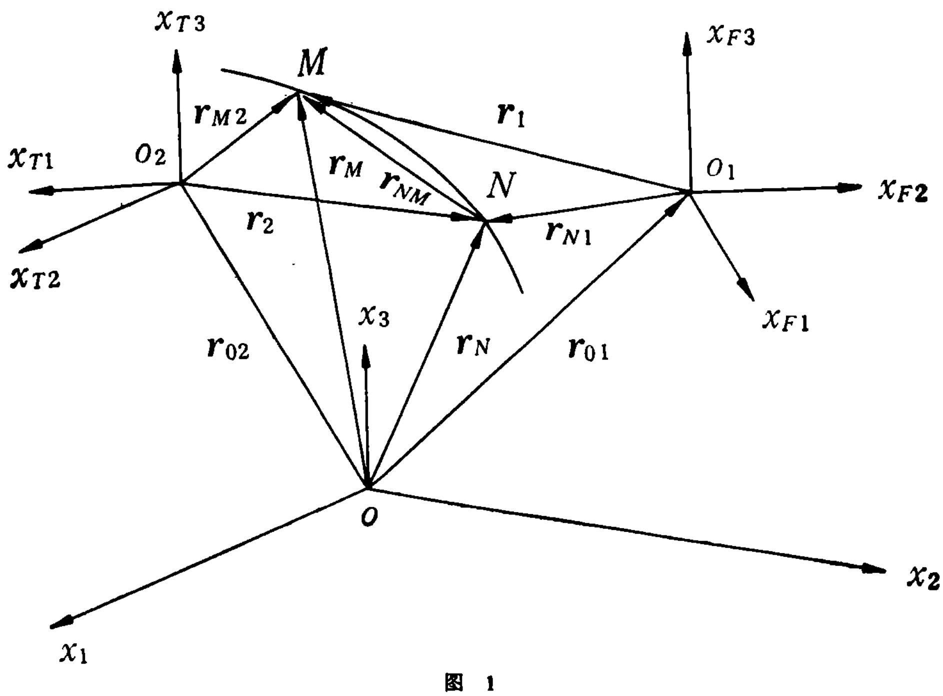

图 1

其中$\boldsymbol{I}$为单位矩阵，于是有

$$\boldsymbol{T}^T=\boldsymbol{T}^{-1},\quad \boldsymbol{F}^T=\boldsymbol{F}^{-1} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_f\boldsymbol{F}^T=\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{T}^T \qquad (4)$$

假定第一类动点M属于动系II，N为动系I上某瞬时与M相重合的点，则由图1可知

$$\boldsymbol{r}_M=\boldsymbol{r}_{02}+\boldsymbol{r}_{M2}=\boldsymbol{r}_{01}+\boldsymbol{r}_1 \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{r}_N=\boldsymbol{r}_{01}+\boldsymbol{r}_{N1}=\boldsymbol{r}_{02}+\boldsymbol{r}_2 \qquad (6)$$

其中

$$\boldsymbol{r}_{M2}=\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{\xi}_{M2} \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_f\boldsymbol{\xi}_1 \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{r}_{N1}=\boldsymbol{e}_f\boldsymbol{\xi}_{N1} \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{\xi}_2 \qquad (10)$$

上式中$\boldsymbol{\xi}_{M2}$，$\boldsymbol{\xi}_{N1}$分别为M、N在动系II和I上的坐标列阵，矩阵中各元素均为常数；而$\boldsymbol{\xi}_1$与$\boldsymbol{\xi}_2$则是第一类动点M和第二类动点N的相对轨迹在动系I和动系II上的列阵，矩阵中各元素一般为时间的函数。因此可以说，$\boldsymbol{\xi}_1$与$\boldsymbol{\xi}_2$分别是M、N的相对轨迹参数方程列阵。

此外，由图1中的几何关系还可看出

$$r_2 = r_{M_2} - r_{NM}$$
$$= r_{M_2} - (r_1 - r_{N_1}) \qquad (11)$$

利用(1)至(10)式，可将(11)式中的各项均变换到动系Ⅱ上，即(11)式可写成

$$e_i\xi_2 = e_i\xi_{M_2} + e_iT^TF(\xi_{N_1} - \xi_1)$$

整理后可得

$$\xi_2 = \xi_{M_2} + T^TF(\xi_{N_1} - \xi_1) \qquad (12)$$

或简记为

$$\xi_2 = \xi_{M_2} + R(\xi_{N_1} - \xi_1) \qquad (13)$$

其中

$$R = T^TF = [R_{ij}]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{3} T_{ki}F_{kj}\right] \quad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (14)$$

如果两个动系均作平动，我们总可以这样选择固连坐标系，使 $F = T = I$，于是 $R = I$，从(13)式可导得

$$\xi_2 - \xi_{M_2} - \xi_{N_1} = -\xi_1 \qquad (15)$$

或

$$\xi_2 - \xi_{M_2} = -(\xi_1 - \xi_{N_1}) \qquad (16)$$

(16)式表明 $\xi_2 - \xi_{M_2}$ 与 $\xi_1 - \xi_{N_1}$ 的对应元素都差一负号，说明二曲线相互间发生了180°的旋转而形状相同。又 $\xi_2 - \xi_{M_2}$、$\xi_1 - \xi_{N_1}$ 分别是 ξ_2、ξ_1 平移的结果，所以当两动系均作平动时，两类动点的相对轨迹形状相同，但发生了平移和旋转。

如果两个动系中至少有一个作含有转动成份的运动(如定轴转动、平面运动、定点运动或刚体的一般运动)，则 f_i 与 $t_j(i, j = 1, 2, 3)$ 中至少有一个为变向量。这样一来必有 $F_{ij} = F_{ij}[\cos\varphi_{ij}(t)]$ 或 $T_{ij} = T_{ij}[\cos\theta_{ij}(t)]$。于是 $R = [R_{ij}(t)](i, j = 1, 2, 3)$，(13)式变为

$$\xi_2 - \xi_{M_2} = -R(\xi_1 - \xi_{N_1}) \qquad (17)$$

在这里仍有 $\xi_2 - \xi_{M_2}$ 与 ξ_2 形状相同，$\xi_1 - \xi_{N_1}$ 与 ξ_1 形状相同。将(17)式与(16)式进行对照就不难发现，此时 $\xi_2 - \xi_{M_2}$ 与 $\xi_1 - \xi_{N_1}$ 的对应元素不仅差一负号，而且二者之间还有一个随时间变化的量的约束，因此它们的形状有很大区别。

在许多实际问题中，ξ_1 常是容易确定的，而且其形状比较简单。由(17)式可知，由于 R 的作用，ξ_2 的

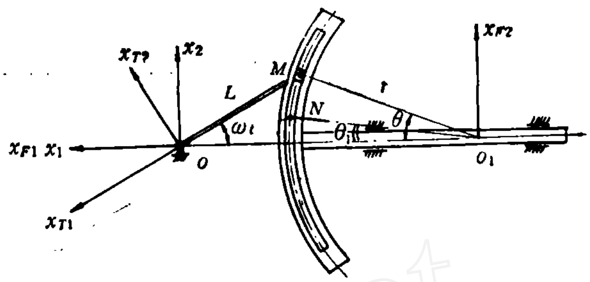

图 2

轨迹通常将变得复杂和不明显。

为说明上述结论以及本文证明方法的具体应用，现举一例。

例 图2示曲柄滑杆机构。其中曲柄 OM 长为 L，以角速度 ω 作匀速转动，带动滑杆作水平滑动，滑杆中的 $\widehat{MN}$ 为圆弧，O_1 为圆心，r 为半径。

取图示坐标系，则

$$F = I$$
$$T = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$
$$\xi_{M_2} = [-L, 0]^T$$
$$\xi_1 = [r\cos\theta, r\sin\theta]^T \quad 其中 \ \sin\theta = \frac{L}{r}\sin\omega t$$
$$\xi_{N_1} = [r\cos\theta_1, r\sin\theta_1]^T \quad 其中 \ \sin\theta_1 = \frac{L}{r}\sin\omega t,$$

据(14)(17)式有

$$R = T^T = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

$$\xi_2 = \begin{Bmatrix} -L \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r\cos\theta_1 - r\cos\theta \\ r\sin\theta_1 - r\sin\theta \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} -L \\ 0 \end{Bmatrix} + r\begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \theta_1) - \cos(\theta + \omega t) \\ \sin(\omega t + \theta_1) - \sin(\theta + \omega t) \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} -L \\ 0 \end{Bmatrix} + 2r\begin{Bmatrix} -\sin\left(\omega t + \frac{\theta_1 + \theta}{2}\right)\sin\frac{\theta_1 - \theta}{2} \\ \cos\left(\omega t + \frac{\theta_1 + \theta}{2}\right)\sin\frac{\theta_1 - \theta}{2} \end{Bmatrix}$$

显然，N 点即第二类动点的相对轨迹不再是一个圆，而是一条形状相当复杂的曲线。