

滚动问题中摩擦力的判断¹⁾

彭瑞东²⁾ 周宏伟 黎立云

(中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京 100083)

摘要 刚体滚动时摩擦力的判断是工程力学中极易引起学生困惑的问题. 在对摩擦力产生原因进行分析的基础上, 确定了刚体纯滚动时静摩擦力的计算公式和判定方法. 刚体作纯滚动时静摩擦力所作总功为零, 仅实现刚体平动动能和转动动能之间的相互转化, 其方向总是阻碍主动力引起的物体运动趋势并使其向另一种运动转化; 刚体作有滑滚动时滑动摩擦力所作总功为负, 其方向与刚体滑动方向相反, 并实现刚体平动动能和转动动能之间的相互转化.

关键词 滚动, 滑动, 摩擦力, 纯滚动, 功

中图分类号 O313.5 **文献标识码** A

文章编号 1000-0879(2010)05-083-04

在刚体动力学分析中, 若系统包含滚动体, 则必须确定滚动体是否受到摩擦力的作用. 尽管在一些情形下可以忽略摩擦力的作用, 从而大大简化对问题的分析求解, 但这并不利于学生掌握理解摩擦力的概念, 也不符合大部分刚体滚动的实际情况. 在教学实践中, 经常发现学生对刚体滚动时摩擦力的情况十分困惑, 尤其是难以正确判断纯滚动时的静摩擦力情况, 因此有必要对这一问题进行深入解释. 本文将对刚体滚动时的摩擦力情况进行系统分析, 详细解释滚动摩擦力、滑动摩擦力以及静摩擦力的作用机制及判断方法.

1 物体滚动时摩擦力的产生原因

两物体相互接触并发生相对运动时, 有两种基本的运动形式, 即滑动和滚动. 在滑动时, 该物体的运动形式为平动, 即运动过程中该物体内所有质点具有相同的速度和加速度, 表现出相同的运动规律. 在滚动时, 一种情形是纯滚动, 即两物体的接触点具有共同速度, 若与固定面接触, 则接触点速度为零, 称为速度瞬心, 运动过程中该物体的运动形式为绕连续变化的瞬心的转动, 物体内各点的速度可按照绕瞬心的圆周运动来确定, 这也称为相对接触点的无滑滚动; 此外还有一种情形是有滑滚动, 此时该物体的运动可看作绕接触点的转动与随接触点的滑动两种运动的合成.

如果这两物体的接触面是绝对光滑的, 就无需考虑两物体间的摩擦力. 但在工程实际中, 理想的完全光滑面是不存在的, 因此往往需要分析考虑这两物体之间的摩擦力. 对于静止或滑动的情形, 接触面间的摩擦力可以根据“阻碍接触面之间相对运动或相对运动趋势”来确定^[1], 本文不再详述. 为了研究滚动时接触面间的摩擦力, 下面首先对接触面间的

摩擦力产生及简化依据进行分析.

不妨考虑在支撑面 M 上作滚动的半径为 R 、重量为 W 的轮子, 滚动摩擦可以通过接触面的变形来理解^[2-3], 如图 1 所示, 由于轮子与支撑面之间的压迫作用而发生形变, 使得支撑面与轮子的接触部分产生了各个方向上的约束反力, 这些力可简化为一个垂直分力、一个水平分力及一个力偶. 根据主动力的不同情形, 这些约束反力的大小也会相应变化, 其中垂直分力即支持力 N , 水平分力即静摩擦力或滑动摩擦力 F , 力偶即滚动摩阻力偶 m .

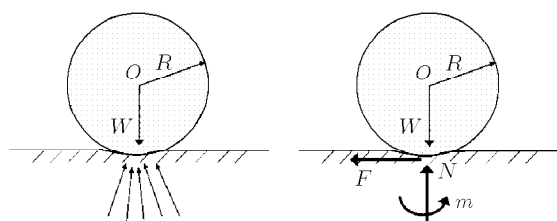


图 1 接触面上的约束反力简化及摩擦力示意图

在轮子静止时, 水平方向的静摩擦力满足 $F \leq F_{\max} = f_s N$, 滚动摩阻力偶满足 $m \leq m_{\max} = \delta N$, 方向与轮子的运动趋势相反, 并与主动力构成静力平衡条件. 其中 $F_{\max}$ 为最大静摩擦力, f_s 为静摩擦系数, $m_{\max}$ 为最大滚动摩阻力偶矩, δ 为滚动摩擦系数. 静摩擦系数 f_s 及滚动摩擦系数 δ 取决于接触面的性质 (如接触面材料、表面粗糙度、湿度、温度等), 它们决定了接触面可能产生的最大静摩擦力及滚动摩阻力偶矩.

在轮子滑动时, 水平方向的滑动摩擦力满足 $F = f N$, 方向与轮子的运动方向相反, 滚动摩阻力偶满足 $m \leq m_{\max} = \delta N$, 方向与轮子的转动趋势相反, 并与主动力构成动力平衡条件. 其中 f 为动摩擦系数, 不仅取决于接触面的性质, 还与轮子的运动速度有关.

在轮子滚动时, 滚动摩阻力偶的方向与轮子转动方向相反, 水平方向摩擦力取决于轮子是否相对支撑面产生滑动. 如果轮子与支撑面之间没有相对滑动, 则轮子作纯滚动, 此时水平方向的摩擦力为静摩擦力, 满足 $F \leq F_{\max} = f_s N$, 即可能取值在 0 到 $F_{\max}$ 之间, 需满足动力平衡条件; 如果轮子与支撑面之间存在相对滑动, 则水平方向的摩擦力为滑动摩擦力, 满足 $F = f N$, 其中 f 为动摩擦系数, 不仅取决于接触面的性质, 还与轮子的运动速度有关, 此时也需满足

2010-01-22 收到第 1 稿, 2010-04-20 收到修改稿.

1) 教育部高等学报特色专业建设点“工程力学”项目 (TS11213), 北京市高等学校教育教学改革立项项目, 北京市高等学术精品课程“工程力学”建设项目资助.

2) 彭瑞东, 1974 年生, 博士, 副教授, 主要从事工程力学的教学和科研工作. E-mail: prd@cumtb.edu.cn

动力平衡条件.

可见,滚动时接触面间的摩擦力是由于物体相互接触而产生的,本质上是一种约束反力,因此其方向及大小会因主动力的不同而不同,与物体的运动形式密切相关.当物体静止或滑动时,摩擦力大小及方向的判定相对简单一些,本文不再详述.下面主要针对物体滚动时摩擦力的判定加以分析,为此需要研究物体滚动时的运动规律,借助达朗贝尔原理建立动力平衡条件,通过功能原理揭示摩擦力的作用效果.

2 刚体滚动时的运动规律及纯滚动的条件

考虑图1所示轮子在支撑面上滚动时的情形,先忽略滚动阻力偶的影响.取支撑面为定参考系,在某一瞬时,轮子质心 C 的平动速度为 v_c ,轮子绕质心 C 转动的角速度为 ω ,可能的情况有4种,如图2所示.

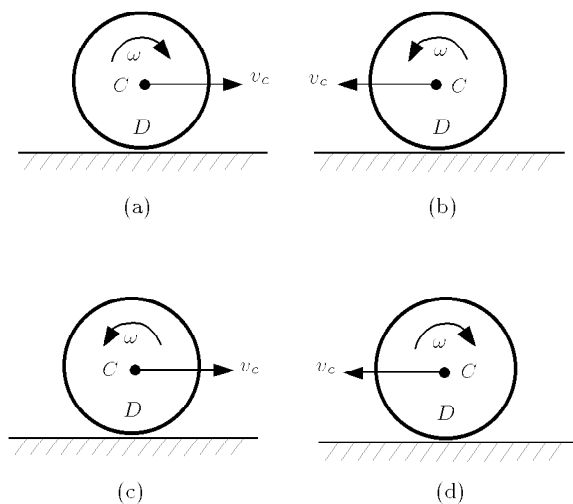


图2 轮子在支撑面上滚动时的速度示意图

对于图2(a)中的情况,由刚体运动学定理可知,经过时间 dt 后,轮子与支撑面的接触点 D 将向右滑动 $(v_c - \omega R)dt$ 的距离,进一步分析可知:

(1) 若 $v_c > \omega R$,则 $(v_c - \omega R)dt > 0$,这说明接触点 D 向右滑动,受到向左的动滑动摩擦力;

(2) 若 $v_c < \omega R$,则 $(v_c - \omega R)dt < 0$,这说明接触点 D 向左滑动,受到向右的动滑动摩擦力;

(3) 若 $v_c = \omega R$,则 $(v_c - \omega R)dt = 0$,这说明接触点 D 无滑动,轮子将作纯滚动,只能受到静摩擦力的作用.

对于图2(b)中的情况,与图2(a)类似,只不过运动方向相反.对于图2(c)中的情况,经过时间 dt 后,轮子与支撑面的接触点 D 将向右滑动 $(v_c + \omega R)dt$ 的距离,因此无论 v_c 与 ωR 孰大孰小,都有 $(v_c + \omega R)dt > 0$,这说明接触点 D 向右滑动,受到向左的动滑动摩擦力.对于图2(d)中的情况,与图2(c)类似,只不过是向左滑动,将受到向右的动滑动摩擦力.因此可得轮子进行纯滚动的条件是

$$v_c = \omega R \quad (1)$$

由力系简化理论可知,此时轮子的惯性力可向轮子的质

心简化为一个主矢 F_i 和一个主矩 M_{Ci} ,即

$$\left. \begin{aligned} F_i &= -m \frac{dv_c}{dt} \\ M_{Ci} &= -I_C \frac{d\omega}{dt} = -m\rho_C^2 \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, m 为轮子的质量, I 为轮子对质心轴的转动惯量, ρ_C 为轮子对质心轴 C 的回转半径.此时轮子受到的主动力包括重力、牵引力、转动力矩等,约束反力如前所述,包括支持力和摩擦力.将除摩擦力 F 以外的其他主动力和约束反力也向质心 C 简化,可得一个主矢 $\sum R$ 和一个主矩 $\sum M_C$.设主矢沿支撑面方向分解为 $\sum R_x$,根据达朗贝尔原理可得

$$\left. \begin{aligned} \sum R_x + F_i + F &= 0 \\ \sum M_C + M_{Ci} + FR &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将纯滚动的限制条件(1)两边对时间 t 求导,并将式(2)和式(3)代入其中可得

$$(\rho^2 + R^2)F = -R \sum M_C - \rho^2 \sum R_x \quad (4)$$

这表明,若轮子发生纯滚动,则所受摩擦力与其它约束力及主动力需满足上式.否则,轮子将发生有滑滚动.

3 刚体纯滚动时静摩擦力的判定

刚体作纯滚动时需满足式(1)和式(4)的条件,下面根据 $\sum R_x$ 及 $\sum M_C$ 的不同情形(如图3)对轮子纯滚动时的受力情况分别进行讨论,并分析摩擦力做功的特点.

(1) $\sum R_x = 0$ 且 $\sum M_C = 0$

此时轮子在沿支撑面方向不受外力的作用,也没有受到

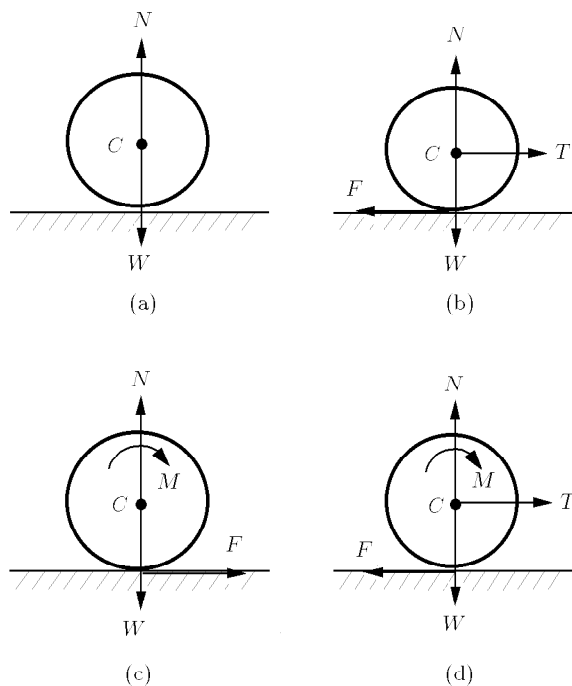


图3 轮子在支撑面上纯滚动时的受力分析

力矩的作用,如图 3(a)所示.根据式(4)可知,此时轮子受到的静摩擦力为零.若摩擦力不为零,则轮子将会产生滑动.这就意味着,在不考虑滚动摩擦的理想情况下,轮子质心 O 的平动速度 v_c 与轮子绕质心 O 转动的角速度 ω 保持不变,这也符合惯性定律和转动定律.可见,在水平方向无主动力作用的轮 W 在水平面上做纯滚动构成了对惯性定律和转动定律的一个简单和能够做出很好说明的实验^[4-5].

(2) $\sum R_x \neq 0$ 且 $\sum M_C = 0$

此时轮子在沿支撑面方向受到牵引力 T 的作用,但没有受到力矩的作用,如图 3(b)所示.根据式(4)可知,此时轮子的静摩擦力为 $F = -\frac{\rho^2}{\rho^2 + R^2}T$,方向与牵引力 T 的方向相反.汽车前进时从动轮所受静摩擦力就属于这种情况.

(3) $\sum R_x = 0$ 且 $\sum M_C \neq 0$

此时轮子在沿支撑面方向不受外力的作用,但受到力矩 M 的作用,如图 3(c)所示.根据式(4)可知,此时轮子的静摩擦力为 $F = -\frac{R}{\rho^2 + R^2}M$,如果力矩 M 为顺时针方向,则 F 的方向向右,如果力矩 M 为逆时针方向,则 F 的方向向左.汽车前进时主动轮所受静摩擦力就属于这种情况.

(4) $\sum R_x \neq 0$ 且 $\sum M_C \neq 0$

此时轮子在沿支撑面方向受到牵引力 T 的作用,同时受到力矩 M 的作用,如图 3(d)所示.根据式(4)可知,此时轮子的静摩擦力为 $F = -\frac{RM + \rho^2 T}{\rho^2 + R^2}$,方向与轮子的形状及力和力矩的大小都有关系,需进行定量计算才能确定.

因受到摩擦力的作用,摩擦力将对轮子做功^[6-8].由刚体运动学定理可知,轮子与支撑面的接触点 D 的速度为

$$v_D = v_C + \omega R \quad (5)$$

则经过时间 dt 后,摩擦力所作的元功为

$$\begin{aligned} dW &= -Fv_D dt = -F(v_C + \omega R)dt = \\ &= -FR\omega dt - Fv_C dt \end{aligned} \quad (6)$$

令 $dW_1 = FR\omega dt$,表示静摩擦力 F 在轮子绕质心 O 转动运动中所作的功,令 $dW_2 = Fv_C dt$,表示静摩擦力 F 在轮子随同质心 O 平动运动中所作的功,则有 $dW = -dW_1 - dW_2$.对于纯滚动的情形,因为 $v_C = -\omega R$,所以有 $dW_1 = -dW_2$,于是可得

$$dW = -dW_1 - dW_2 = 0 \quad (7)$$

这说明,当轮子作纯滚动时,静摩擦力 F 总体并不做功,但是可以分别在轮的转动与平动这两种基本运动中作功,这两种功一正一负、数值相等,相互抵消使得总功为零.当静摩擦力在某一运动中作负功时会减小这种运动的动能,作正功时会增加这种运动的动能.因此在轮子作纯滚动时,静摩擦力所起的作用是通过分别在轮的转动与平动中做功来实现转动动能与平动动能之间的能量转换.

由以上分析可知,当物体作纯滚动时,静摩擦力对一种运动作正功必然对另一种运动作负功,这一规律也是判断纯

滚动轮所受静摩擦力方向的基本依据,即静摩擦力总是阻碍主动力引起的物体运动趋势并使其向另一种运动转化.对于图 3(a)所示情形,物体不受主动力影响,因此静摩擦力为零,对两种运动均不做功.对于图 3(b)所示情形,牵引力将引起轮子平动,因此静摩擦力将阻碍平动并使其向转动变化,于是可以判断出静摩擦力的方向与牵引力方向相反,从而抑制质心平动速度的增加,并使转动角速度增加,以保证纯滚动的实现.对于图 3(c)所示情形,驱动力矩将引起轮子转动,因此静摩擦力将阻碍转动并使其向平动变化,于是可以判断出静摩擦力的方向是使其对质心之矩与驱动力矩方向相反,从而抑制转动角速度的增加,并使质心平动速度增加,以保证纯滚动的实现.对于图 3(d)所示情形,静摩擦力的作用亦是如此,将通过转动动能与平动动能之间的能量转换来实现纯滚动.以汽车纯滚动前进时为例,忽略其他阻力进行简化分析,加在主动轮上的驱动力矩将使车轮转动,地面的摩擦力将主动轮的转动动能转化为平动动能,驱动汽车前进,在从动轮上地面的摩擦力又将平动动能转化为转动动能,实现汽车滚动前进,如图 4 所示.

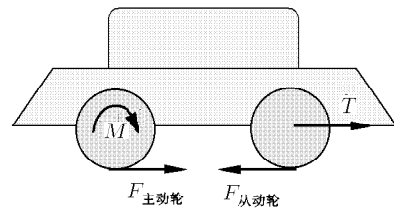


图 4 汽车纯滚动时摩擦力分析

4 刚体滚动时的滑动摩擦

刚体作有滑滚动时,受到滑动摩擦力的作用,如图 2 所示情形,其方向判定亦如前所述.此时摩擦力做功仍可由式(6)确定,根据 v_c 与 ωR 的大小及方向分为以下 3 种情况:

(1) v_c 与 ωR 异号且 $v_c > \omega R$

此时轮子质心平动速度 v_c 与由于轮子绕质心转动引起的线速度 $v_D = \omega R$ 方向相反,如图 2(a)所示,且有 $v_c > \omega R$,则滑动摩擦力的方向与 v_c 的方向相反,滑动距离为 $ds = (v_c - \omega R)dt$,如图 5(a)所示.于是摩擦力做功为

$$dW = -Fds = -F(v_c - \omega R)dt = dW_1 - dW_2 < 0 \quad (8)$$

其中 $dW_1 < dW_2$.即滑动摩擦力对平动做负功的值要小于对转动作正功的值,从而使轮子的动能减小,并将平动动能转化为转动动能.

(2) v_c 与 ωR 异号且 $v_c < \omega R$

此时轮子质心平动速度 v_c 与由于轮子绕质心转动引起的线速度 $v_D = \omega R$ 方向相反,如图 2(b)所示,且有 $v_c < \omega R$,则滑动摩擦力的方向与 v_c 的方向一致,滑动距离为 $ds = (\omega R - v_c)dt$,如图 5(b)所示.于是摩擦力做功为

$$dW = -Fds = -F(\omega R - v_c)dt = dW_2 - dW_1 < 0 \quad (9)$$

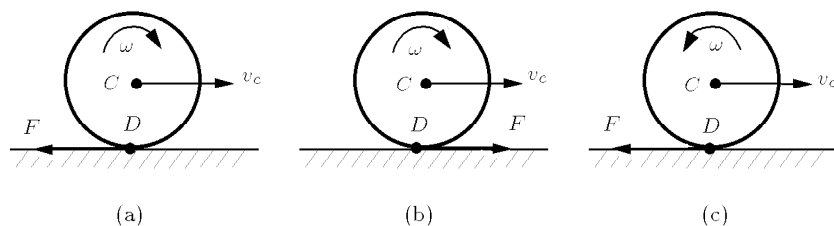


图5 轮子在支撑面上有滑滚动时的受力分析

其中, $dW_1 > dW_2$. 即滑动摩擦力对转动做负功的值要大于对平动作正功的值, 从而使轮子的动能减小, 并将转动动能转化为平动动能.

(3) v_c 与 ωR 同号

此时轮子质心平动速度 v_c 与由于轮子绕质心转动引起的线速度 $v_D = \omega R$ 方向一致, 如图 2(c), 2(d) 所示, 则滑动摩擦力的方向与 v_c 的方向相反, 滑动距离为 $ds = (\omega R + v_c)dt$, 如图 5(c) 所示. 于是摩擦力做功为

$$dW = -Fds = -F(\omega R + v_c)dt = -dW_1 - dW_2 < 0 \quad (10)$$

即滑动摩擦力对转动及平动都是做负功, 从而使轮子的动能减小.

可见, 在有滑滚动中, 滑动摩擦力做功可以使刚体的平动动能和转动动能之间相互转化, 但滑动摩擦力所作的总功

为负. 而在纯滚动中, 静摩擦力所作总功为零, 仅仅实现刚体平动动能和转动动能之间的相互转化.

5 物体滚动时的滚动摩擦力偶

由于滚动摩擦系数很小, 所以通常在分析问题忽略滚动摩擦力偶的作用, 不予考虑. 本文前面的分析也是基于忽略滚动摩阻力偶来进行的. 但有时不能忽略滚动摩阻力偶的影响, 就需要判断滚动摩阻力偶的方向, 即与物体滚动方向或趋势相反.

例如在某一斜面上自然搁置一个重量为 W 的轮子, 如图 6 所示. 若不考虑摩擦力, 轮子将沿斜面向下滑动, 如图 6(a) 所示; 若仅考虑静摩擦力或滑动摩擦力, 轮子将沿斜面向下作纯滚动或有滑滚动, 如图 6(b) 所示; 若轮子在斜面上某一位置静止, 则必然是静摩擦力与滚动摩阻力偶共同作用的结果, 如图 6(c) 所示.

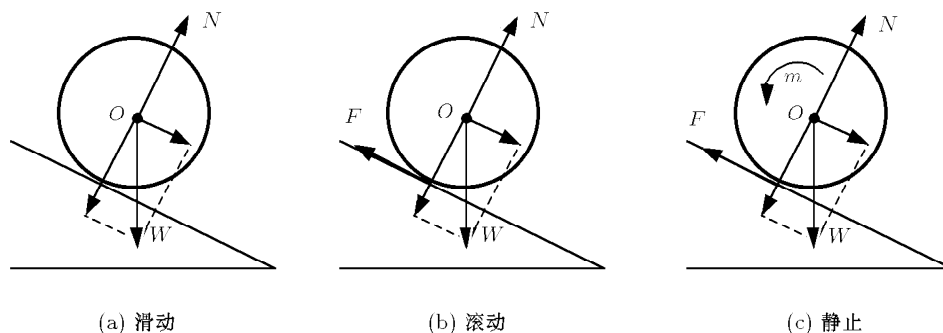


图6 轮子在支撑面上有滑滚动时的受力分析

6 结 论

刚体滚动时, 接触面间的摩擦力是由于物体相互接触而产生的, 本质上是一种约束反力, 因此其方向及大小会因主动力的不同而不同, 与物体的运动形式密切相关. 刚体作纯滚动时, 受到静摩擦力的作用, 且静摩擦力所作总功为零, 仅仅实现刚体平动动能和转动动能之间的相互转化, 其方向总是阻碍主动力引起的物体运动趋势并使其向另一种运动转化. 刚体作有滑滚动时, 受到滑动摩擦力的作用, 且滑动摩擦力所作总功为负, 其方向与刚体滑动方向相反, 并可实现刚体平动动能和转动动能之间的相互转化. 滚动摩阻力偶的方向与物体滚动方向或趋势相反, 但由于滚动摩擦系数很小, 通常不考虑滚动摩阻力偶的影响.

参 考 文 献

- 1 周衍柏. 理论力学. 北京: 高等教育出版社, 2003
- 2 贾书惠. 理论力学. 北京: 清华大学出版社, 2005
- 3 宁雅丽. 滚动问题中摩擦力的研究. 兰州工业高等专科学校学报, 2008, 15(2): 52-54
- 4 刘大为, 牛福龙. 纯滚动轮所受静摩擦力方向的确定. 甘肃联合大学学报(自然科学版), 2008, 22(6): 51-53
- 5 戴国平. 试析刚体做滚动运动时摩擦力的方向. 读与写(教育教学刊), 2007, 4(11): 39-40
- 6 刘海. 有滑滚动中摩擦力的功. 六盘水师范高等专科学校学报, 2007, 19(6): 21
- 7 周雨青, 叶兆宁, 彭毅. 纯滚动运动中的摩擦力做功问题. 物理与工程, 2004, 14(5): 31-33
- 8 胡辉. 无滑滚动时摩擦力的功. 力学与实践, 2001, 23(4): 64-65

(责任编辑: 周冬冬)