

Vibration and Noise, Cincinnati, Ohio, September. 1985. 10~13

5 Hori YA. Theory of oil whips. *J Appl Mech*, 1959: 189~198

6 Cookson RA, Kossa SS. The effectiveness of squeeze-film damper bearing supporting flexible rotors without a centralizing spring. *Int J Mech Sci*, 1980, 22: 313~324

7 Khonsari MM. Oh the self-excited whirl orbits of a journal in a sleeve bearing lubricated with micropolar fluids. *Acta Mechanica*, 1990, 81(3): 235~244

8 Cveticanin L. Approximate analytical solutions to a class of non-linear equations with complex functions. *J Sound and Vibration*, 1992, 157(3): 289~302

## STABILITY OF JEFFCOTT'S RIGID ROTOR WITH OIL FILM

HU Chao HUANG Wenhui

(Harbin Institute of Technology, Dept. of Aerospace Engn. & Mech., Harbin 150001, China)

ZHAO Xinghua ZHANG Zhiming

(Shanghai University, Shanghai Institute of Appl. Math. & Mech., Shanghai 200072, China)

**Abstract** Based on the mathematical model of Jeffcott's rigid rotor with oil film and linearized differential equation method, the stability of zeroth solution of rotor motion equation and its stability of self-excited vibration are investigated in this paper. The conditions of stable rotation are obtained. Reduced phase equations of three dimensions are firstly proposed.

**Key words** rotor dynamics, stability, self-excited vibration, limit cycle

# 黏弹性结构振动阻尼等效化方法的讨论

李俊宝 王大钧

应怀樵

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871) (东方振动和噪声技术研究所, 北京 100085)

**摘要** 基于能量等效的原则将黏弹性结构振动阻尼等效简化成黏性阻尼模型来处理是工程上常用的方法。

本文首先介绍了能量等效法, 并提出了一种基于系统特征值相等原则的等效方法; 详细讨论并比较了这两种黏性阻尼等效方法所得到的等效系统, 指出基于能量、特征值等效的原则实质上分别等价于系统的频率响应函数、频率响应函数幅值的等效性。

**关键词** 黏弹性阻尼, 黏性阻尼, 能量等效, 特征值, 振动分析

## 1 引言

黏弹性材料以其良好的阻尼特性, 被设计、制造成各种形式的黏弹性复合结构(如约束阻尼层结构)、黏弹性阻尼构件, 广泛地应用于工程结构的振动和噪声控制中<sup>[1]</sup>。如何描述黏弹性阻尼结构的振动阻尼是其动力学建模和分析的一个重要环节。通常的结构振动分析, 大多将结构的振动阻尼用黏性阻尼模型来描述, 从而使结构动力学模型变得较为容易处理, 有关

的理论也比较成熟。为便于结构振动分析, 经常应用能量法将结构的非黏性阻尼等效简化成黏性阻尼<sup>[2]</sup>, 黏弹性结构也不例外, 工程上黏弹性材料的本构关系常用复刚度模型来描述, 利用能量等效法可以近似得到黏弹性结构的一种等效黏性阻尼模型。本文从另一角度——基于系统特征值相等的原则, 也获得了一种等效黏性阻尼模型, 并详细讨论了能量法和特征值等效法所导致的结果、等效系统与原黏弹性系统各特征值之间的关系、存在的差异等问题。

## 2 系统基本方程

考虑如图 1(a) 所示的一个单自由度系统, 设质量为  $m$ , 弹簧由黏弹性材料制成, 用复刚度  $k_v(1+j\eta)$  表示,  $k_v$  和  $\eta$  分别是黏弹性材料的储能刚度和损耗因子, 实际上它们为频率、温度等量的函数。容易写出这个系统的振动方程为

$$m\ddot{x} + k_v(1+j\eta)x = f(t) \quad (1)$$

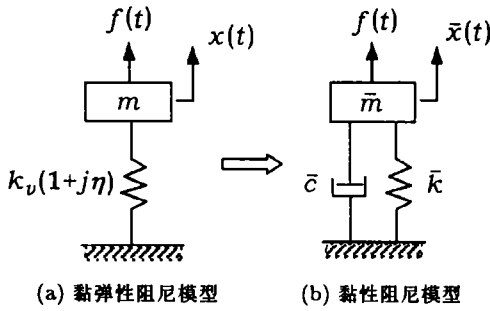


图 1 单自由度模型

对应该系统的特征值和频率响应函数分别为

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_v}{m}} \left( -\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}} + j\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2}} \right) \quad (2)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + j\eta k_v + k_v} \quad (3)$$

假设在小阻尼条件下，振动系统在简谐激励力  $f(t)$  作用下作同频率稳态简谐振动，其振动响应、动能、弹性势能、阻尼耗散能（包括一个振动周期内的阻尼耗散能）分别表示为

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ T_t &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ U_t &= \frac{1}{2} k_v A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ W_t &= \frac{1}{2} \eta k_v A^2 \left[ \omega t - \frac{1}{2} (\sin 2(\omega t + \varphi) - \sin 2\varphi) \right] \\ W_d &= \pi \eta k_v A^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中， $A$  是响应幅值， $\omega$  和  $\varphi$  分别为振动频率和相位。

再考虑如图 1(b) 示的黏性阻尼单自由度系统，其振动微分方程

$$\bar{m}\ddot{x} + \bar{c}\dot{x} + \bar{k}x = f(t) \quad (5)$$

对应该系统的特征值为

$$\bar{\lambda} = \omega_n (-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) \quad (6)$$

式中，无阻尼系统的固有频率  $\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}}$ ，黏性阻尼比  $\xi = \frac{\bar{c}}{2\sqrt{\bar{m}\bar{k}}}$ 。对应该系统的频率响应函数为

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{1}{-\bar{m}\omega^2 + j\bar{c}\omega + \bar{k}} \quad (7)$$

该系统的振动响应、动能、弹性势能、阻尼耗散能（包括一个振动周期内的阻尼耗散能）可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{A} \cos(\omega t + \bar{\varphi}) \\ \bar{T}_t &= \frac{1}{2} \bar{m} \omega^2 \bar{A}^2 \sin^2(\omega t + \bar{\varphi}) \\ \bar{U}_t &= \frac{1}{2} \bar{k} \bar{A}^2 \cos^2(\omega t + \bar{\varphi}) \\ \bar{W}_t &= \frac{1}{2} \bar{c} \omega \bar{A}^2 \left[ \omega t - \frac{1}{2} (\sin 2(\omega t + \bar{\varphi}) - \sin 2\bar{\varphi}) \right] \\ \bar{W}_d &= \pi \bar{c} \omega \bar{A}^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

### 3 能量等效方法

将图 1(a) 表示的黏弹性结构阻尼系统等效为图 1(b) 所示的黏性阻尼系统，要求保证系统在外激励力  $f(t)$  作用下式 (4) 和式 (8) 中的各关系式分别对应恒等，可得到下述等效结果

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(t) &\equiv x(t) \Rightarrow \bar{A} = A, \bar{\varphi} = \varphi \\ \bar{T}_t &\equiv T_t \Rightarrow \bar{m} = m \\ \bar{U}_t &\equiv U_t \Rightarrow \bar{k} = k_v \\ \bar{W}_t &\equiv W_t \Rightarrow \bar{c} = \frac{\eta k_v}{\omega} \quad (\omega \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

对应的等效黏性阻尼系统的振动方程可由式 (5) 写出

$$m\ddot{x} + \frac{\eta k_v}{\omega} \dot{x} + k_v x = f(t) \quad (\omega \neq 0) \quad (10)$$

将式 (9) 代入式 (7) 可得到等效系统的频率响应函数，它与原系统的式 (3) 应保持相等，即  $\bar{H}(j\omega) = H(j\omega)$ ， $\lim_{\omega \rightarrow 0} \bar{H}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega)$ 。对应方程 (10) 的特征值  $\bar{\lambda}$

可由式 (6) 直接给出，系统的固有频率  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_v}{m}}$ ，等效黏性阻尼比  $\xi = \frac{\eta \omega_n}{2\omega}$ ，显然， $\bar{\lambda} \neq \lambda$  ( $\lambda$  为原系统的特征值)。当  $\omega \rightarrow \omega_n$ ，即在系统的共振频率附近时，等效黏性阻尼比近似满足  $\xi = \eta/2$  的关系， $\bar{c} = \frac{\eta k_v}{\omega_n}$ ，这时等效系统的特征值可近似为  $\bar{\lambda} = -\sqrt{\frac{k_v}{m}} \frac{\eta}{2} + j\sqrt{\frac{k_v}{m}} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{4}}$ ，再当黏弹性损耗因子  $\eta$  较小时，近似存在  $\bar{\lambda} = \lambda$ 。工程上常利用关系  $\xi = \eta/2$ ，通过共振实验来测定黏弹性阻尼结构的损耗因子。

事实上，能量等效法可完全等价于系统频率响应函数恒等的原则。由全频段内图 1 所示两系统的频率

响应函数恒等, 即  $\bar{H}(j\omega) \equiv H(j\omega)$ , 得到与式 (9) 完全相同的结果

$$\left. \begin{aligned} -\bar{m}\omega^2 &\equiv -m\omega^2 \Rightarrow \bar{m} = m \\ \bar{k} &= k_v \\ j\bar{c}\omega &\equiv j\eta k_v \Rightarrow \bar{c} = \frac{\eta k_v}{\omega} \quad (\omega \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

#### 4 特征值等效方法

前述系统能量等效法不能保证系统的特征值相等. 如果图 1 所示两系统等效是基于系统特征值相等的原则,  $\bar{\lambda} \equiv \lambda$ , 再假设两系统在相同的简谐激励力作用下的振动响应、瞬时动能分别相等, 可以得到如下等效结果

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(t) &\equiv x(t) \Rightarrow \bar{A} = A, \bar{\varphi} = \varphi \\ \bar{T}_t &\equiv T_t \Rightarrow \bar{m} = m \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}} = \sqrt{\frac{k_v \sqrt{1+\eta^2}}{m}} \Rightarrow \bar{k} = k_v \sqrt{1+\eta^2} \\ \xi &= \frac{\bar{c}}{2\sqrt{\bar{m}\bar{k}}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{1+\eta^2}}}{2}} \Rightarrow \bar{c} = \\ &\quad \sqrt{2mk_v} \sqrt{\sqrt{1+\eta^2} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

对应的等效黏性阻尼系统的振动方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \sqrt{2mk_v} \sqrt{\sqrt{1+\eta^2} - 1} \dot{x} + \\ k_v \sqrt{1+\eta^2} x = f(t) \end{aligned} \quad (13)$$

对比由式 (13) 和式 (1) 分别表示的等效黏性阻尼系统和原黏弹性阻尼结构系统, 除系统的特征值、振动响应和瞬时动能不变外, 瞬时弹性势能、耗散能、频率响应函数都不能保持相等. 显然, 两系统的频率响应函数的幅值在全频率范围内应保持相同, 即  $|\bar{H}(j\omega)| = |H(j\omega)|$ .

由式 (12) 知,  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \xi = \sqrt{2}/2$ , 说明得到的等效黏性系统的阻尼比最大不超过  $\sqrt{2}/2$ . 当损耗因子  $\eta$  较小时, 近似得到:  $\xi = \eta/2$ ,  $\bar{c} = (\eta k_v)/\omega_n$ ,  $\omega_n = \sqrt{k_v/m}$ ,  $\bar{k} = k_v$  和  $\bar{U}_t = U_t$ , 再若系统处于共振频率附近时, 存在  $\bar{H}(j\omega) \approx H(j\omega)$ , 此时系统的耗散能也保持近似相等.

实际上, 系统特征值等效方法完全等价于系统频率响应函数的幅值恒等的原则. 由  $|\bar{H}(j\omega)| = |H(j\omega)|$

出发, 可以得到与式 (12) 完全相同的结果

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}^2 \omega^4 &\equiv m^2 \omega^4 \Rightarrow \bar{m} = m \\ \bar{k}^2 &= k_v^2 (1 + \eta^2) \Rightarrow \bar{k} = k_v \sqrt{1 + \eta^2} \\ (\bar{c}^2 - 2\bar{m}\bar{k})\omega^2 &\equiv -2mk_v\omega^2 \Rightarrow \bar{c} = \\ &\quad \sqrt{2mk_v} \sqrt{\sqrt{1 + \eta^2} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

#### 5 两种等效方法的对比

通过比较分析能量法和特征值等效法所得到的结果, 可概括出以下几点结论:

(1) 黏弹性阻尼和黏性阻尼属于两种不同性质的阻尼模型, 基于不同的等效方法 (如文中的能量等效法和特征值等效法), 虽可将原黏弹性结构系统等效为不同的黏性阻尼系统, 但都不能保证两系统之间的完全等价性. 由能量法等效得到的黏性阻尼是频率的函数, 其值随频率的增大而减小; 特征值等效法得到的黏性阻尼系数是一常数, 对应系统的动力学方程易于求解. 黏弹性损耗因子  $\eta$  越大, 上述两种等效方法带来的差别也越大, 特别地, 特征值等效法得到的黏性阻尼比最大值不超过  $\sqrt{2}/2$ . 当  $\eta$  较小, 且在系统共振频率附近时, 由文中所述的两种等效方法得到的等效黏性阻尼系统近似相同, 而且都保持与原黏弹性系统的基本等价.

(2) 能量法完全等价于  $\bar{H}(j\omega) = H(j\omega)$ ; 特征值等效法等价于  $|\bar{H}(j\omega)| = |H(j\omega)|$ , 没有考虑系统的相位特性.

(3) 能量法和特征值等效法得到的黏性阻尼系统的固有频率, 分别对应于黏弹性结构特征值分析中采用的模态应变能方法和绝对值应变能方法得到的结果.

前面已经指出, 当  $\eta$  较小时, 两种等效方法所得结果近似相同, 工程上可不必区分; 对于具有较大  $\eta$  的黏弹性复合结构的动力学分析, 作者建议工程上采用特征值等效方法较为合适, 因为此时应计入复刚度的虚部对结构固有频率和振型的影响 (这与绝对值应变能方法是相一致的).

#### 参 考 文 献

- 1 张希农. 可控约束阻尼层及其在航天结构中的应用. 西安交通大学博士学位论文, 1999
- 2 倪振华. 振动力学. 西安: 西安交通大学出版社, 1994

#### EQUIVALENT APPROACH OF VIBRATION DAMPING IN

## VISCOELASTIC STRUCTURES

LI Junbao WANG Dajun

(Dept. of Mechanics and Engineering Science,  
Peking University, Beijing 100871, China)

YING Huaiqiao

(China Orient Institute of Noise and Vibration,  
Beijing 100085, China)

**Abstract** In structural vibration analyses, vibration damping of viscoelastic structures is equivalently reduced to a visco-damping model by the well-known energy equivalent principle. The approach of energy equivalent principle is at first introduced in

this paper, and a new method based on the equivalent eigenvalues of the system is also suggested to reduce viscoelastic damping to a visco-damping model. The detailed discussion and comparison of the two methods are conducted for the obtained equivalent systems. It is also pointed out that the results obtained by the energy method are identical to those by the equivalent frequency response functions of the two systems, and the other method means the equivalent amplitudes of frequency response functions.

**Key words** viscoelastic damping, visco-damping, energy equivalent, eigenvalue equivalent, vibration analysis

## 杆件撤除对平面刚架影响的实用算法

江爱民 汪小超 沈晓安

(浙江工业大学浙西分校, 衢州 324006)

**摘要** 基于矩阵位移法, 提出了用于分析杆件撤除对平面刚架结构影响的简化计算方法. 与以往不同, 本法仅将杆件撤除视为在原结构上增加荷载工况, 因此无需重建总体刚度矩阵即可用于分析杆件撤除对结构的影响. 本方法的计算速度比矩阵位移法快很多, 算例表明, 两种方法的计算结果一致.

**关键词** 杆件, 平面刚架结构, 工况, 关联系数

文献 [1] 介绍了一种分析杆件撤除对空间网格结构影响的计算方法, 针对网格结构中各杆件为轴力杆的受力情况, 将杆件的撤除视为在原结构上增加一种荷载工况. 本文将文献 [1] 的思想方法推广应用到平面刚架结构中任意一根杆件被撤除对整体结构的受力影响研究, 提出一种简化方法: 在矩阵位移法基础上建立并分解原刚架结构的总体刚度矩阵, 而将杆件的撤除仅视为在原结构上增加四种工况, 从而无需重建和分解总体刚度, 即能快速、有效、实用地计算分析任一根杆件撤除对整体刚架结构的影响.

## 1 基本思路

## 1.1 荷载工况

在结构坐标系中单元  $e$  的杆端内力如图 1(b) 所示.

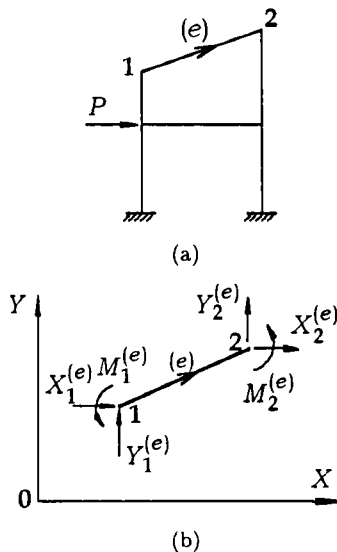


图 1

为分析图 2 中撤除杆件  $j$  对平面刚架的影响, 本文将其视为在原结构上增加 4 种受力状况, 因此可定