

# 非对称楔形重力坝受重力和液体压力的弹性力学解<sup>1)</sup>

袁学波<sup>2)</sup> 袁江宏 江晓禹 李翔宇<sup>3)</sup>

(西南交通大学力学与航空航天学院, 成都 610031)

**摘要** 弹性力学教材给出了楔形重力坝的应力场理论解, 但假定坝体受液压边界与重力方向平行且下端无限延伸, 这与实际工程重力坝不符。本文针对更加贴近实际工程的非对称楔形重力坝, 采用叠加原理和半逆解法推导了应力场的理论解, 并与有限元分析结果进行了对比。理论解与有限元数值结果在远离坝底区域吻合, 说明了理论解的准确性。本文研究结果不仅对重力坝的工程设计具有一定的指导意义, 还为弹性力学提供了具体的教学实践。

**关键词** 弹性力学, 楔形重力坝, 应力场, 有限元分析

中图分类号: O343 DOI: 10.6052/1000-0879-24-437

文献标识码: A CSTR: 32047.14.1000-0879-24-437

## ELASTICITY SOLUTION FOR NONSYMMETRIC WEDGE DAMS UNDER GRAVITY AND HYDROSTATIC PRESSURE<sup>1)</sup>

YUAN Xuebo<sup>2)</sup> YUAN Jianghong JIANG Xiaoyu LI Xiangyu<sup>3)</sup>

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract** The textbook of Elasticity presents a theoretical solution to the stress field of a wedge dam. This model assumes that the boundary subjected to hydrostatic pressure is parallel to the gravity and that the lower end extends infinitely, which does not align with engineering design. In the current work, we establish a mechanics model for a nonsymmetric wedge dam that is more practically relevant, and derive the analytical solution to the stress field by virtue of the principle of superposition and the semi-inverse method. Finite element analysis is performed to obtain numerical results for the stress field, demonstrating the accuracy of the theoretical solution in regions far from the dam base. This work provides valuable insights for the engineering design of gravity dams and contributes a concrete example to the theory of elasticity.

**Keywords** elasticity mechanics, wedge gravity dam, stress field, finite element analysis

在弹性力学的经典教材<sup>[1,2]</sup>中, 平面问题的直角坐标解答章节介绍了楔形重力坝受重力和液体压力作用的弹性力学问题, 通过纯三次多项式应力函数推导了应力场的理论解, 即 Levy 解。此

模型对重力坝做了 3 个简化假定: (1) 坝体承受液体压力的边界与重力方向平行; (2) 坝体下端无限延伸, 可自由变形; (3) 坝体上端为尖顶且自由。需要指出的是, 这些假设在实际工

本文于 2024-10-30 收到。

1) 西南交通大学 2024 年高水平育人课程教学改革项目 (GK20240112), 国家自然科学基金 (12402114), 四川省自然科学基金 (2023NSFSC1301) 和中央高校基本业务费项目 (2682023CX053) 资助。

2) 袁学波, 讲师, 从事柔性结构力学科学研究和弹性力学教学研究。E-mail: yuanxb@swjtu.edu.cn

3) 通讯作者: 李翔宇, 教授, 研究方向为智能材料多场耦合力学。E-mail: zjuparis6@hotmail.com

**引用格式:** 袁学波, 袁江宏, 江晓禹等. 非对称楔形重力坝受重力和液体压力的弹性力学解. 力学与实践, xxxx, x(x): 1-8

Yuan Xuebo, Yuan Jianghong, Jiang Xiaoyu, et al. Elasticity solution for nonsymmetric wedge dams under gravity and hydrostatic pressure. *Mechanics in Engineering*, xxxx, x(x): 1-8

程中往往并不完全成立。在教学实践中,引导学生意识到简化假设的局限性,并鼓励学生思考更加贴近工程设计的力学模型,对于提升教学质量以及培养学生的理论建模能力、批判思维能力和理论与实践相结合的思维能力具有重要的促进作用。

刘章军等<sup>[3]</sup>和周浩等<sup>[4]</sup>摒弃假定(3),按照教材中楔形体受重力和液体压力以及楔形体在楔顶受力的基本解答,采用叠加法对受压面铅垂的矩形变截面重力坝求解了应力场。类似地,肖先志等<sup>[5]</sup>摒弃假定(3),针对直角梯形截面重力坝,结合楔形体基本解答与叠加法构造了直角坐标应力函数,推导了应力场的解析表达。在实际工程设计中,大部分重力坝承受液体压力的边界是倾斜的,而非平行于重力方向;此外,坝体是有限高的,坝底受到地基约束,而非自由延伸。然而,笔者在调研中尚未发现理论文献摒弃假定(1),也未见文献定量分析弹性力学解对有限高重力坝的适用性。

本文不再遵循假定(1),考虑一个非对称楔形体受重力和液体压力的弹性力学问题,采用半逆解法与叠加原理推导了平面应力场的理论解。采用 ABAQUS 通用软件建立有限高重力坝的平面应变有限元模型,有限元分析结果与理论解在远离坝底区域吻合。本文工作不仅能为重力坝的工程设计提供一定指导,还能深化弹性力学教学内容,兼具工程应用价值与教学实践意义。

## 1 弹性力学模型与应力场理论解

图1为非对称楔形重力坝受重力和液体压力的力学模型。重力坝视为很长的等截面柱体,其变形视为平面应变问题。直角坐标系( $O-xy$ )的原点取为坝顶 $O$ , $x$ 轴正方向为水平向右, $y$ 轴正方向为垂直向下。楔面 $OA$ 和 $OB$ 与 $y$ 轴正方向的夹角分别为 $\alpha$ 和 $\beta$ 。左楔面 $OB$ 承受液体压力,液面与坝顶平齐。重力平行于 $y$ 轴正方向,重力加速度为 $g$ 。坝体和液体的密度分别为 $\rho$ 和 $\gamma$ 。坝体下端视为无限长,可自由变形。

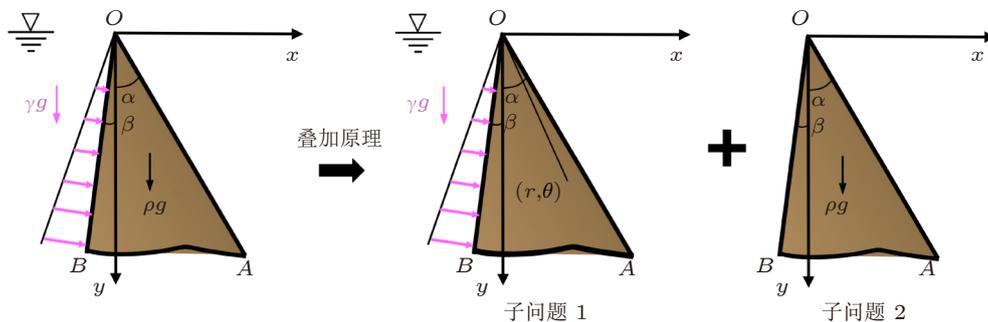


图1 非对称楔形体受重力和液体压力的弹性力学模型与子问题分解

由叠加原理,楔形重力坝受重力和液体压力的变形问题可分解为两个子问题。下面通过半逆解法推导两个子问题的应力场理论解。

### 1.1 子问题 1: 楔形重力坝的楔面 $OB$ 受液体压力

在极坐标系( $O-r\theta$ )中,用量纲分析方法寻求该问题的应力函数 $\phi_1$ 。描述问题的载荷与几何参数包括: $\gamma g$ , $\alpha$ , $\beta$ , $r$ 和 $\theta$ ,其中 $\gamma g$ 表征了作用于楔面 $OB$ 液体压力的大小,量纲为[力]/[长度]<sup>3</sup>; $\alpha$ , $\beta$ 和 $\theta$ 为无量纲量; $r$ 的量纲为[长度]。显然,应力分量是 $\gamma g$ , $\alpha$ , $\beta$ , $r$ 和 $\theta$ 的函数表达,而应力分量的量纲为[力]/[长度]<sup>2</sup>。从量纲上看,

应力分量的形式应为 $\gamma g r F(\alpha, \beta, \theta)$ ,其中 $F$ 为无量纲函数。应力函数在 $r$ 的幂次上比应力分量高两次,因此应力函数可假设为

$$\phi_1 = r^3 f(\theta) \quad (1)$$

式中, $f(\theta)$ 是包含 $\gamma g$ , $\alpha$ 和 $\beta$ 的有量纲函数。应力函数必须满足相容方程 $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \phi_1 = 0$ ,将式(1)代入其中,可求得

$$f(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + C \cos 3\theta + D \sin 3\theta \quad (2)$$

因此,应力函数为

$$\phi_1 = r^3 (A \cos \theta + B \sin \theta + C \cos 3\theta + D \sin 3\theta) \quad (3)$$

进而, 各应力分量的表达式求解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= -2r(-A \cos \theta - B \sin \theta + 3C \cos 3\theta + 3D \sin 3\theta) \\ \sigma_\theta^{(1)} &= 6r(A \cos \theta + B \sin \theta + C \cos 3\theta + D \sin 3\theta) \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= -2r(-A \sin \theta + B \cos \theta - 3C \sin 3\theta + 3D \cos 3\theta) \end{aligned} \right\} (4)$$

右楔面  $OA$  ( $\theta = \pi/2 - \alpha$ ) 为自由边界, 左楔

面  $OB$  ( $\theta = \pi/2 + \beta$ ) 承受液体压力, 故有应力边界条件

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\theta^{(1)})_{\theta=\pi/2-\alpha} &= 0, & (\tau_{r\theta}^{(1)})_{\theta=\pi/2-\alpha} &= 0 \\ (\sigma_\theta^{(1)})_{\theta=\pi/2+\beta} &= -\gamma gr \cos \beta, & (\tau_{r\theta}^{(1)})_{\theta=\pi/2+\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

将应力分量表达式代入边界条件, 4 个待定

参数求解为

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{8}\gamma g \frac{\sin(4\alpha + 4\beta) + \sin(4\alpha + 2\beta) + 2\sin(2\alpha + 4\beta) + 2\sin(2\alpha + 2\beta) - 2\sin(2\beta)}{\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3} \\ B &= -\frac{1}{8}\gamma g \frac{\cos(4\alpha + 4\beta) + \cos(4\alpha + 2\beta) - 2\cos(2\alpha + 4\beta) - 2\cos(2\alpha + 2\beta) - \cos(2\beta) + 1}{\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3} \\ C &= -\frac{1}{24}\gamma g \frac{\sin(4\alpha + 2\beta) + 2\sin(2\alpha - 2\beta) + \sin(4\alpha) + 2\sin(2\alpha) + 3\sin(4\beta) + 3\sin(2\beta)}{\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3} \\ D &= -\frac{1}{24}\gamma g \frac{\cos(4\alpha + 2\beta) + 2\cos(2\alpha - 2\beta) + \cos(4\alpha) + 2\cos(2\alpha) - 3\cos(4\beta) - 3\cos(2\beta)}{\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3} \end{aligned} \right\} (6)$$

将上述 4 个参数代回式 (4), 即可得子问题 1 在极坐标下的应力场理论解。由转换关系  $x = r \cos \theta$  和  $y = r \sin \theta$ , 直角坐标下应力分量可表达为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \frac{\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}}{2} + \frac{\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{2} \cos 2\theta - \tau_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta \\ \sigma_y^{(1)} &= \frac{\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}}{2} - \frac{\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{2} \cos 2\theta + \tau_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta \\ \tau_{xy}^{(1)} &= \frac{\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{2} \sin 2\theta + \tau_{r\theta}^{(1)} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} (7)$$

## 1.2 子问题 2: 楔形重力坝受重力作用

参考弹性力学教材中楔形体问题的直角坐标解答, 由量纲分析将应力函数取为纯三次多项式, 即

$$\phi_2 = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{12}\rho g \frac{2\sin(2\alpha + 4\beta) - \sin(4\alpha + 2\beta) + 2\sin(2\alpha - 2\beta) - \sin 4\alpha + \sin 2\alpha + \sin 4\beta - \sin 2\beta}{\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3} \\ b &= \frac{1}{4}\rho g \frac{\cos(4\alpha + 2\beta) + 2\cos(2\alpha + 2\beta) - 2\cos(2\alpha + 2\beta) - \cos 4\alpha - \cos 4\beta + 1}{\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3} \\ c &= \frac{1}{4}\rho g \frac{\sin(2\alpha + 4\beta) - \sin(4\alpha + 2\beta) - 2\sin(2\alpha - 2\beta) + \sin 4\alpha + \sin 2\alpha - \sin 4\beta - \sin 2\beta}{\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3} \\ d &= \frac{1}{12}\rho g [\cos(4\alpha + 4\beta) - 2\cos(4\alpha + 2\beta) - 2\cos(2\alpha + 4\beta) - 4\sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 4\beta + 2\cos 2\beta - 3] / [\cos(4\alpha + 4\beta) - 4\cos(2\alpha + 2\beta) + 3] \end{aligned} \right\} (12)$$

将上述 4 个参数代回式 (9), 即得到子问题 2

坝体受  $x$  方向和  $y$  方向的体力分量分别为 0 和  $\rho g$  (常体力), 因此应力分量表达为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= 2cx + 6dy \\ \sigma_y^{(2)} &= 6ax + 2by - \rho gy \\ \tau_{xy}^{(2)} &= -2bx - 2cy \end{aligned} \right\} (9)$$

右楔面  $OA$  ( $y = x \cot \alpha$ ) 和左楔面  $OB$  ( $y = -x \cot \beta$ ) 均为自由边界, 故应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha (\sigma_x^{(2)})_{y=x \cot \alpha} - \sin \alpha (\tau_{xy}^{(2)})_{y=x \cot \alpha} &= 0 \\ \cos \alpha (\tau_{xy}^{(2)})_{y=x \cot \alpha} - \sin \alpha (\sigma_y^{(2)})_{y=x \cot \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} -\cos \beta (\sigma_x^{(2)})_{y=-x \cot \beta} - \sin \beta (\tau_{xy}^{(2)})_{y=-x \cot \beta} &= 0 \\ -\cos \beta (\tau_{xy}^{(2)})_{y=-x \cot \beta} - \sin \beta (\sigma_y^{(2)})_{y=-x \cot \beta} &= 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

将应力分量表达式代入边界条件, 4 个待定参数求解为

在直角坐标下的应力场理论解。

基于子问题 1 与子问题 2 的应力场理论解, 楔形重力坝在重力与液体压力作用下的应力分量最终可通过叠加原理表示为

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} \quad (13)$$

## 2 结果分析与讨论

### 2.1 楔面 $OB$ 为铅垂面的重力坝的应力场分析与有限元分析对比

若左楔面  $OB$  为铅垂面 (即  $\beta = 0$ ), 式 (6) 中各参数简化为

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{4}\gamma g \cot^3 \alpha, \quad B = -\frac{1}{8}\gamma g + \frac{1}{8}\gamma g \cot^2 \alpha \\ C &= -\frac{1}{12}\gamma g \cot^3 \alpha, \quad D = \frac{1}{24}\gamma g + \frac{1}{8}\gamma g \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由极坐标应力解 (式 (4)) 与坐标变换公式 (式 (7)), 子问题 1 在直角坐标系下的应力分量表达为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= -\gamma g y \\ \sigma_y^{(1)} &= -2\gamma g x \cot^3 \alpha + \gamma g y \cot^2 \alpha \\ \tau_{xy}^{(1)} &= -\gamma g x \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式 (12) 中各参数简化为

$$a = \frac{1}{6}\rho g \cot \alpha, \quad b = c = d = 0 \quad (16)$$

子问题 2 在直角坐标系下的应力分量 (式 (9)) 表达为

$$\sigma_x^{(2)} = 0, \quad \sigma_y^{(2)} = \rho g x \cot \alpha - \rho g y, \quad \tau_{xy}^{(2)} = 0 \quad (17)$$

叠加式 (15) 与式 (17), 应力场理论解在  $\beta = 0$  情况下退化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)} = -\gamma g y \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} = (\rho g \cot \alpha - 2\gamma g \cot^3 \alpha)x + (\gamma g \cot^2 \alpha - \rho g)y \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} = -\gamma g x \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

该式与弹性力学教材中的经典表达式 (即 Levy 解) 一致。

通过有限元分析对重力坝进行数值模拟。坝体材料的杨氏模量和泊松比分别设置为  $E = 30.0$  GPa 和  $\mu = 0.2$ , 坝体材料的密度为  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>, 液体密度为  $\gamma = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, 重力加速度为  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>。坝体的铅垂高度  $H$  取为

200 m。采用 ABAQUS 软件建立平面有限元模型 (图 2(a)), 坝体被离散成精细的四节点平面应变单元 (CPE4R)。离散单元的最小尺寸取为 0.1 m, 足够保证有限元分析的网格收敛性。坝体底部的所有自由度均被约束。采用 DLOAD 子程序对楔面  $OB$  施加线性分布的液体压力。设定 5 条水平路径 ( $y = 20, 50, 100, 150$  和 180 m), 提取各应力分量的有限元分析值。

对于  $\alpha = 15^\circ$  的楔形重力坝, 图 2(b) 和图 2(c) 展示了 3 个应力分量 ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$ ) 沿 5 条水平路径的分布情况, 离散点为有限元分析结果, 实线为式 (18) 的理论计算结果。正应力  $\sigma_x$  沿  $x$  方向没有变化且为负值, 正应力  $\sigma_y$  沿  $x$  方向单调减少, 剪应力  $\tau_{xy}$  沿  $x$  方向从零逐渐线性减小。可见, 当水平路径离坝体底部相对较远时 (如  $y \leq 150$  m), 应力分量  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  与  $\tau_{xy}$  的理论解与有限元结果非常吻合。然而, 在接近坝体底部区域 (如  $y = 180$  m), 理论解与有限元结果的偏差非常明显。

本文理论模型假定坝体无限高且底部可自由变形, 而有限元分析模型是有限高的且底部完全约束。理论解与有限元分析结果在靠近坝体底部区域的偏差来源于底部边界条件的差异。对于  $\alpha = 15^\circ$  的楔形重力坝, 图 3 展示了左楔面不同位置处 ( $y = 50, 100$  和 180 m) 的正应力  $(\sigma_y)_{OB}$  随重力坝高度  $H$  的变化关系。对于 3 个不同的左楔面位置, 当重力坝高度  $H$  较小时,  $(\sigma_y)_{OB}$  随高度  $H$  减小, 这是因为底部边界效应减弱。当重力坝高度  $H$  足够大时,  $(\sigma_y)_{OB}$  与高度  $H$  几乎无关, 且与理论解吻合。

工程重力坝的坝体通常由脆性的混凝土材料制成, 其抗拉能力远小于抗压能力。在重力坝的结构设计中, 应使坝体处于压应力状态。根据 Levy 解, 右楔面  $OA$  正应力  $(\sigma_y)_{OA} = -\gamma g y \cot^2 \alpha$  为负, 左楔面  $OB$  正应力  $(\sigma_y)_{OB} = (\gamma g \cot^2 \alpha - \rho g)y$  的正负依赖于  $\gamma g \cot^2 \alpha$  与  $\rho g$  的相对大小。如图 4(a) 所示, 给定坝体材料与液体的密度 ( $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>,  $\gamma = 1000$  kg/m<sup>3</sup>), 增加角度  $\alpha$  可降低正应力  $\sigma_y$  的水平。图 4(b) 展示了  $(\sigma_y)_{OB}$  随角度  $\alpha$  的变化。理论上, 若角度  $\alpha$  大于安息角  $\arctan(\gamma/\rho)^{1/2} \approx 32^\circ$ ,  $(\sigma_y)_{OB}$  为负值,  $\sigma_y$  沿  $x$  方

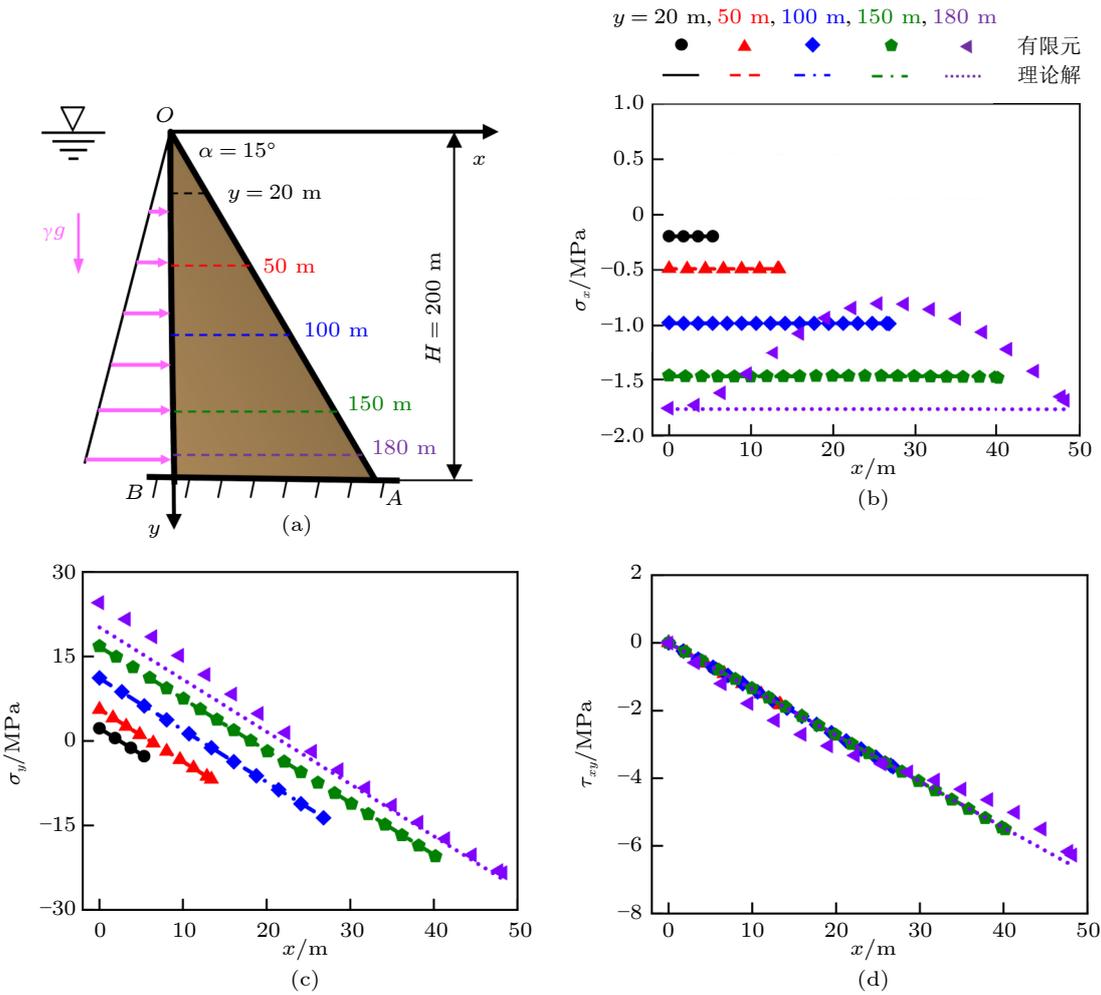


图2 含铅垂面的重力坝示意图以及各应力分量沿5条水平路径的理论与有限元结果对比

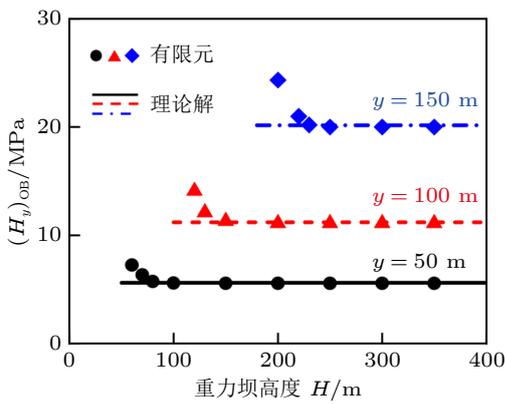


图3 含铅垂楔面的重力坝不同位置处左楔面应力  $(\sigma_y)_{OB}$  随重力坝高度  $H$  的变化关系

向始终小于零。有限元分析预测的安息角与理论计算结果接近。由此可见，基于坝体无限长假定的 Levy 解对于重力坝设计具有一定的指导意义。但是，坝底附近正应力  $\sigma_y$  的理论解低于有限元结果（图3），因此重力坝的整体安全设计仍需借助有限元分析等数值模拟手段。

### 2.2 楔面 OB 为非铅垂面的重力坝的应力场分析

在重力坝的实际工程设计中，承受液体压力的左楔面  $OB$  往往并非为铅垂面 ( $\beta > 0$ )，如图5(a)所示。此处，针对  $\alpha = 15^\circ$  和  $\beta = 5^\circ$  对应的非对称楔形重力坝，图5(b)和图5(c)展示了3个应力分量沿着5条水平路径的分布情况。该楔形重力坝的应力分布情况与 Levy 解存在较大差别。正应力  $\sigma_x$  沿  $x$  方向近似线性增大，且始终保持为负值。剪应力  $\tau_{xy}$  在左楔面上不再为零，沿  $x$  方向近似线性减小，且也始终保持为负值。相比于  $\alpha = 15^\circ$  和  $\beta = 0$  的情况，该重力坝的正应力  $\sigma_y$  水平较低且分布更加集中。与前面结果类似，理论解与有限元结果在远离坝底区域非常吻合，但在接近坝底区域具有明显偏差。

图6(a)展示了不同角度  $\beta$  下正应力  $\sigma_y$  沿水平路径  $y = 50$  m 的分布情况，此处固定  $\alpha = 15^\circ$ 。可见，增加左楔面的倾斜角度  $\beta$  可降低正应力  $\sigma_y$

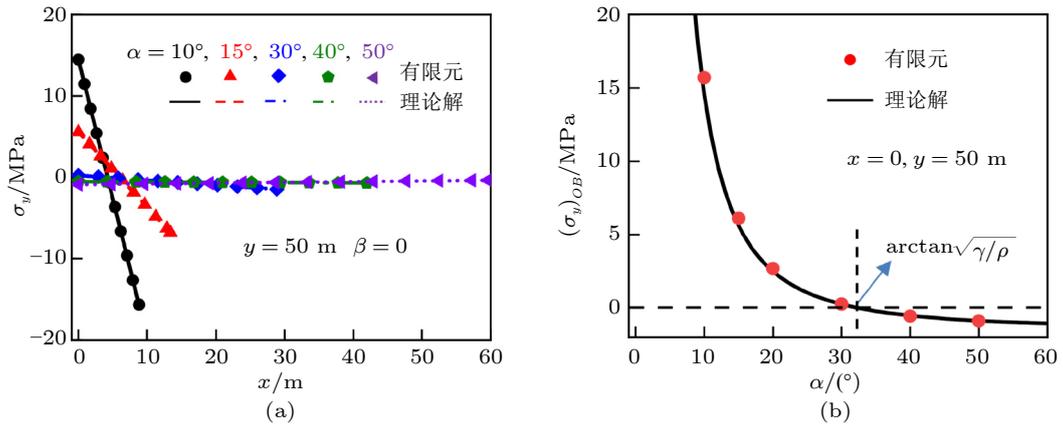


图4 不同角度  $\alpha$  下应力  $\sigma_y$  沿水平路径  $y = 50\text{ m}$  的分布及左楔面应力  $(\sigma_y)_{OB}$  随角度  $\alpha$  的变化关系

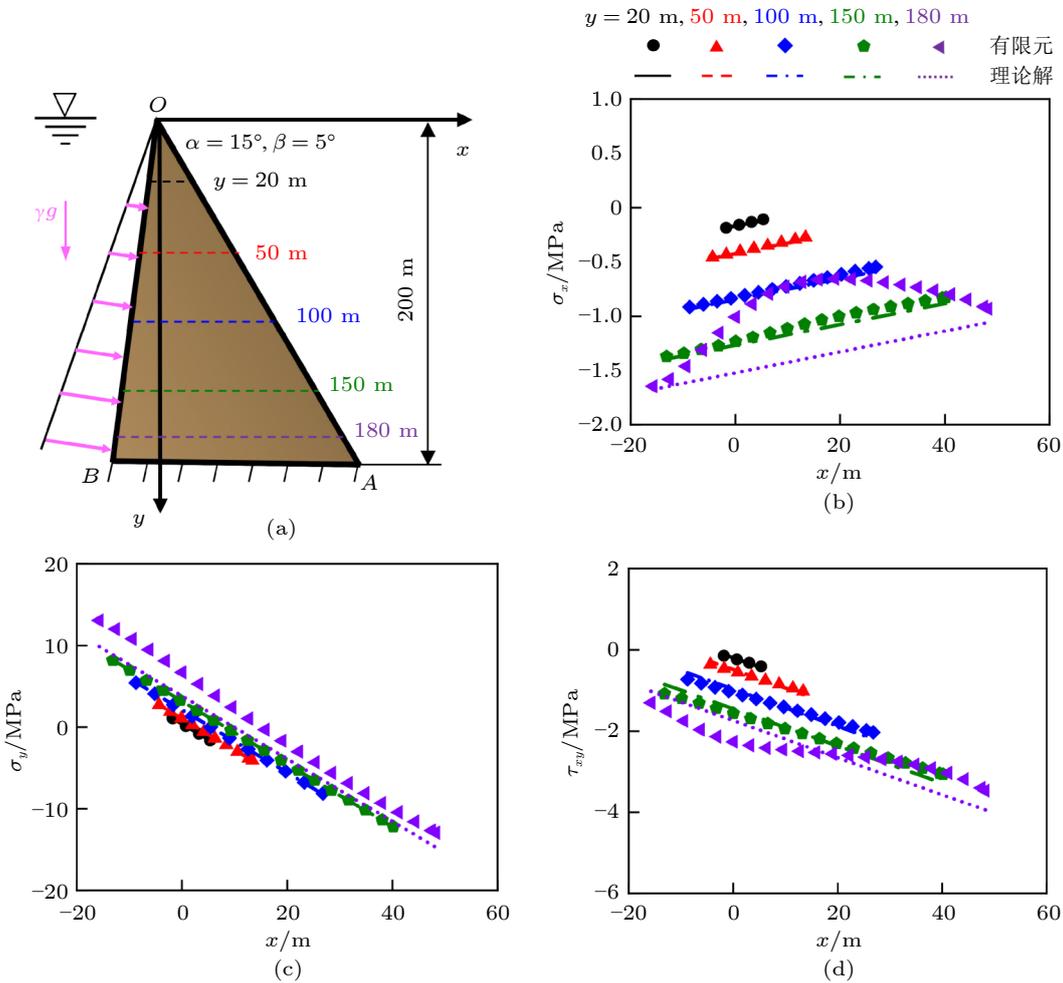


图5 含非铅垂楔面的重力坝示意图以及各应力分量沿5条水平路径的理论与有限元结果对比

的水平，从而提升重力坝的安全性。按照理论计算，当  $\beta$  大于临界值  $25^\circ$  时，左楔面正应力  $(\sigma_y)_{OB}$  为负值，如图 6(b) 所示。该理论临界值与有限元结果非常吻合。

由上述结果可知，本文针对非对称楔形重力坝建立的弹性力学理论解具有较高的准确性。在

工程重力坝的优化设计实践中，本文理论解有望用于提供一组良好的几何设计初值，从而有效地减少优化迭代次数，提升设计效率。

### 2.3 本文理论模型在弹性力学教学中的应用

本文的理论模型和应力场求解综合了叠加原理、基于量纲分析的半逆解法、应力坐标变换公

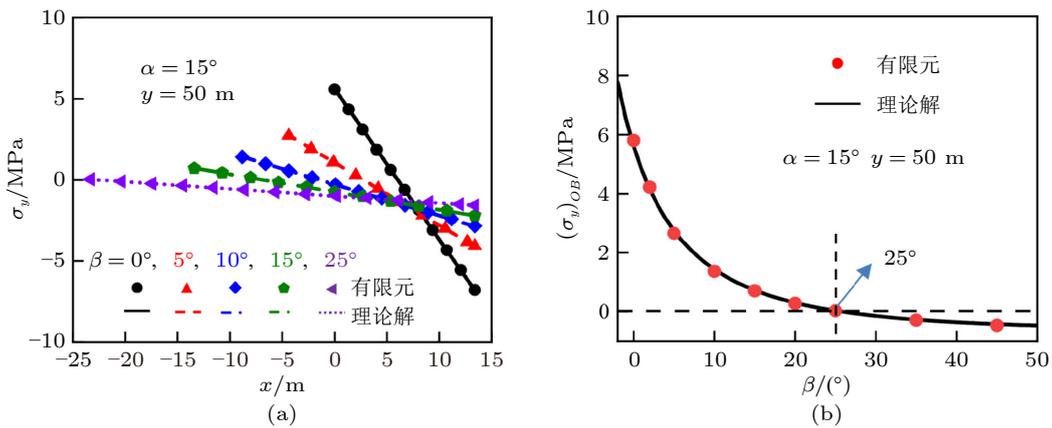


图6 不同角度 $\beta$ 下应力 $\sigma_y$ 沿水平路径 $y = 50$  m 的分布及左楔面应力 $(\sigma_y)_{OB}$ 随角度 $\beta$ 的变化关系

式、直角坐标解答以及极坐标解答等重要的弹性力学教学内容，推导难度比教材中楔形体基本问题稍大，适合用于思维能力扩展。在教学中，笔者将本文模型应用于本科生课程“弹性力学”，具体设计如下。

(1) “平面问题的直角坐标解答”的“楔形体受重力和液体压力”章节

首先，笔者讲解 Levy 解后，向学生展示我国三峡大坝、礼亨水库等典型重力坝的实景图 and 截面图，启发引导学生思考工程重力坝与教材模型的差异，引出 Levy 解的 3 个简化假定。

然后，展示有限高重力坝的有限元分析模型和仿真结果，通过对比分析 Levy 解的正确性。

最后，引导学生建立摒弃简化假定的弹性力学模型。摒弃假定 (1) 的力学模型即为本文模型。通过叠加原理，将问题分解为两个子问题。针对子问题 1，说明采用直角坐标解答的推导难度，为后续的极坐标解答留下伏笔。针对子问题 2，采用教材中的纯三次多项式推导应力场的理论解。

(2) “平面问题的极坐标解答”的“楔形体在楔顶或楔面受力”章节

首先，笔者在完成“楔面受均布载荷作用的问题”的讲解后，引入本文的子问题 2（即楔面受非均匀、线性分布载荷），采用量纲分析和半逆解法推导应力场的理论解。

然后，叠加子问题 1 和子问题 2，给出非对称楔形体受重力与液体压力作用下应力场的理论解，展示有限元分析与理论解的对比。简要分析

本文模型对工程重力坝设计的指导意义。

最后，引导学生同时摒弃 3 个简化假定，建立具有非直角梯形重力坝的力学模型，作为课后探索。

笔者采用启发式教学法和案例教学法，通过上述流程将本文内容融入到弹性力学的教学设计中。通过课堂讲解与案例分析，学生直接接触到实际工程中的弹性力学问题，从而将课堂理论与工程实践相结合，激发了学生的学习热情，并获得了积极的课堂反馈。读者可以进一步采用分组讨论、翻转课堂等形式实施本文内容的教学，鼓励学生自主进行理论建模、求解与分析，提升其批判性思维 and 实践能力。

### 3 结论

针对非对称楔形重力坝受重力和液体压力的弹性力学问题，本文采用半逆解法和叠加原理推导了应力场的理论解，并与有限元分析进行了对比。本文所得理论解与有限元分析结果在远离坝底的区域非常吻合，显示出较高的准确性。该理论解对重力坝的工程设计具有一定的理论指导意义和实际应用价值。本文的理论求解过程融合了叠加原理、半逆解法、直角坐标解答与极坐标解答等诸多弹性力学内容，不仅深化了对教材中经典问题的探讨，还能启发学生思考经典模型的局限性，从而有助于提升教学质量。同时摒弃 3 个简化假定的非直角梯形重力坝更加符合工程设计，其在重力、液体压力以及坝顶载荷作用下的弹性力学解值得进一步探索。

## 参 考 文 献

- 1 徐芝纶. 弹性力学, 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2016  
Xu Zhilun. Elasticity, 5th edn. Beijing: Higher Education Press, 2016 (in Chinese)
- 2 王光钦, 丁桂宝, 杨杰. 弹性力学, 第 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2015  
Wang Guangqin, Ding Guibao, Yang Jie. Elasticity, 3rd edn. Beijing: Tsinghua University Press, 2015 (in Chinese)
- 3 刘章军, 叶永, 周宜红等. 用楔形体解答求解矩形变截面梁及其适用范围. 力学与实践, 2012, 34(2): 71-74
- 4 周浩, 王博, 徐建国. 利用弹性理论求混凝土重力坝应力分布. 人民黄河, 2012, 34(6): 120-124  
Zhou Hao, Wang Bo, Xu Jianguo. Solving the stress distribution of concrete gravity dam on the basis of elastic theory. *Yellow River*, 2012, 34(6): 120-124 (in Chinese)
- 5 肖先志, 肖奉英, 黄模佳. 梯形重力坝的应力函数解及其有限元验证. 力学与实践, 2023, 45(1): 113-118  
Xiao Xianzhi, Xiao Fengying, Huang Mojia. Stress function solution for trapezoidal gravity dam and its finite element verification. *Mechanics in Engineering*, 2023, 45(1): 113-118 (in Chinese)

(责任编辑: 王永会)