

直剪试验过程中剪切面上法向应力变化规律分析¹⁾

雷胜友^{*,2)} 惠会清[†]

^{*}(长安大学公路学院, 西安 710064)

[†](长安大学理学院, 西安 710064)

摘要 首先推导出不同剪切位移下试样截面惯性矩表达式, 然后计算得到试样剪切面上归一化最大、最小法向应力随剪切位移变化的关系曲线, 发现两法向应力及其差值随剪切位移的增大而增大, 随试样剪切面直径或剪切边长的增大而减小。当试样剪切面直径和边长相同时, 圆形试样剪切面上的法向应力要比方形上均匀些。当试样剪切面为矩形, 沿矩形长边方向剪切时, 其上法向应力的分布要比沿短边方向剪切时均匀些。建议尽量使用剪切面为圆形的大样进行直剪试验。

关键词 剪切面积, 剪切位移, 截面惯性矩, 直径, 边长

中图分类号: TU443 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-22-512

ANALYSIS OF NORMAL STRESS VARIATION ON SHEAR PLANE DURING DIRECT SHEAR TEST¹⁾

LEI Shengyou^{*,2)} HUI Huiqing[†]

^{*}(Highway School, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

[†](Science School, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract In this paper, the expression of the moment of inertia of the specimen section that changes with the shear displacement is derived first, and then the relationship curve between the normalized maximum and minimum normal stresses on the specimen shear plane and the shear displacement is calculated. It is found that the two normal stresses and their differences increase with the increase of the shear displacement, and decrease with the increase of the diameter of the specimen shear plane or the shear side length. When the diameter and side length of the shear plane of the sample are the same, the normal stress distribution on the shear plane of the circular sample should be more uniform. When the shear plane of the specimen is rectangular, the normal stress distribution on the shear plane along the long side of the rectangle is more uniform than that along the short side. It is recommended to use the large sample with circular shear surface for direct shear test.

Keywords shear area, shear displacement, section moment of inertia, diameter, side length

直剪试验是最常用的一种土的强度试验, 其设备简单, 易于操作, 很受工程界的欢迎。但是该试验设备也有一个缺陷, 就是在剪切过程中, 随着剪切位移的发生, 土样的实际剪切面在不断

地缩小, 进而发生上剪切盒的翘起, 试样剪切面上的法向力不再是中心受荷, 而是偏心受力。当剪切面为圆形时, 则不断地缩小为两个半拱形面积之和; 当剪切面为矩形时, 则剪切面不断缩小

2022-09-13 收到第 1 稿, 2022-10-30 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金项目 (59479017), 铁道部科技研究开发项目 (2010G003-F), 国家级大学生创新创业训练计划项目 (S202010710008, 202010710556), 长安大学土力学精品课程项目资助。

2) 雷胜友, 教授, 长期从事土力学与岩石力学、高铁深水基础研究。E-mail: 1436885380@qq.com

引用格式: 雷胜友, 惠会清. 直剪试验过程中剪切面上法向应力变化规律分析. 力学与实践, 2023, 45(3): 580-584

Lei Shengyou, Hui Huiqing. Analysis of normal stress variation on shear plane during direct shear test. *Mechanics in Engineering*, 2023, 45(3): 580-584

成为更小的矩形，这样剪切面上的法向应力分布是不均匀的，也使得剪切面上的剪应力分布不均匀。那么随着剪切位移的发生，剪切面上的最大、最小法向应力是如何发展的？关于这方面的研究鲜有报道。为此，笔者以剪切面积的变化为出发点，进行剪切面上法向应力分布特点研究，并从一点的应力状态入手，分析土的剪应力强度分布的均一性。

1 试样剪切面上归一化最大、最小法向应力

1.1 不同剪切位移下剪切面积表达式

在剪切过程中，试样剪切面位置的变化如图 1 所示，根据以往的研究成果^[4]，在直剪试验过程中，土样剪切面积随着剪切位移 x 发展有如下关系式

剪切面为圆形

$$S' = \frac{\pi R^2}{90} \arccos\left(\frac{x}{2R}\right) - \frac{x\sqrt{4R^2 - x^2}}{2} \quad (1)$$

剪切面为矩形

$$S' = sl\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (2)$$

剪切面为正方形

$$S' = l^2\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (3)$$

1.2 不同剪切位移下试样截面惯性矩的推导

为了计算剪切过程中剪切面上的最大法向应力 and 最小法向应力，首先必须计算剪切过程中任意时刻试样剪切面的截面惯性矩，下面分别按试样为圆形、矩形、正方形推导其惯性矩。

(1) 剪切面为圆形时，由图 2(a)，设剪切面的圆方程为

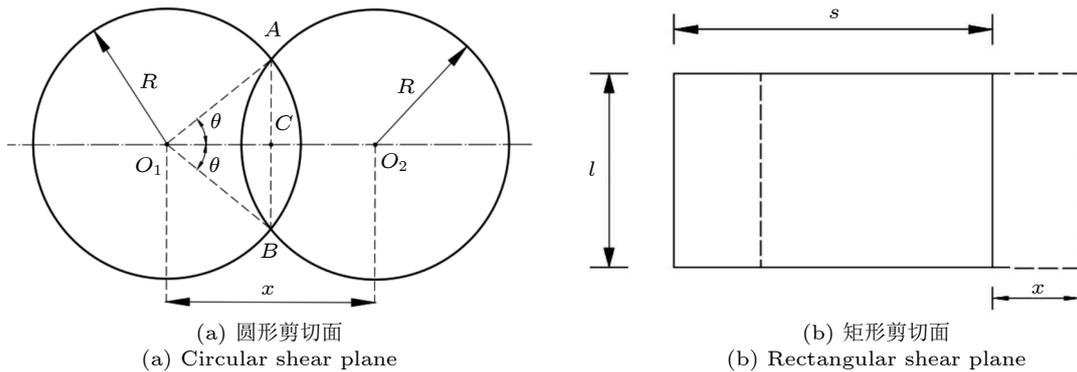


图 1 试样剪切面随剪切位移变化示意图 (1)

Fig. 1 Schematic diagram of the change of the shear plane of the sample with the shear displacement (1)

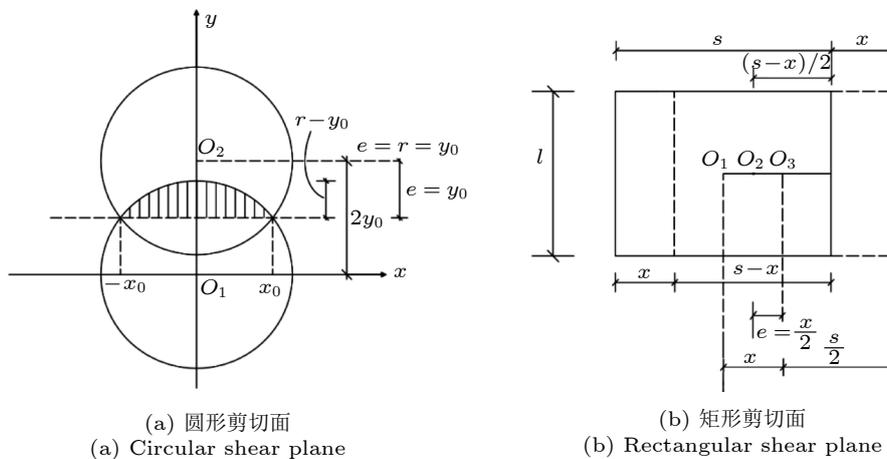


图 2 试样剪切面随剪切位移变化示意图 (2)

Fig. 2 Schematic diagram of the change of the shear plane of the sample with the shear displacement (2)

$$x^2 + (y + y_0)^2 = r^2 \quad (4)$$

其中两个圆相交所得直线的方程为

$$y = y_0 \quad (5)$$

则圆弧与直线相交所围成的两弓形面积即为剪切过程中试样剪切面积, 根据截面惯性矩的定义^[2], 设上半弓形面积对 $y = y_0$ 轴的截面惯性矩为 I_{x1} , 则有

$$\begin{aligned} I_{x1} &= \int_A y^2 dA = \int_0^{r-y_0} y^2 \times 2x dy = \\ & \int_0^{r-y_0} y^2 \times 2\sqrt{r^2 - (y + y_0)^2} dy = \\ & 2 \int_0^{r-y_0} y^2 \sqrt{r^2 - (y + y_0)^2} dy \end{aligned} \quad (6)$$

进行积分变换, 令 $y + y_0 = z, dy = dz$

当 $y = 0$ 时, $z = y_0$

当 $y = r - y_0$ 时, $z = r$, 则有

$$I_{x1} = 2 \int_{y_0}^r (z - y_0)^2 \sqrt{r^2 - z^2} dz \quad (7)$$

设上、下两个弓形所围成的面积对 $y = y_0$ 的截面惯性矩为 I_x , 则

$$\begin{aligned} I_x &= 4 \int_{y_0}^r (z - y_0)^2 \sqrt{r^2 - z^2} dz = \\ & \left(\frac{r^4}{4} + r^2 y_0^2 \right) \pi - \left(\frac{r^4}{2} + 2y_0^2 r^2 \right) \arcsin \frac{y_0}{r} - \\ & \left(2y_0^3 + \frac{r^2 y_0}{2} \right) \sqrt{r^2 - y_0^2} - \frac{5}{3} y_0 (r^2 - y_0^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

在式 (5) 中, $y_0 = \frac{x}{2}$, 将 y_0 值代入式 (8), 在 Excel 中编程, 即可计算出任意剪切位移下试样截面惯性矩。

(2) 当剪切面为矩形时, s 为平行于剪切方向的边长, l 为垂直于剪切方向的边长, 剪切过程中剪切面积重合部分对 x 轴的截面惯性矩为

$$I_x = \frac{l(s-x)^3}{12} \quad (9)$$

(3) 当剪切面为正方形时, $l = s$, 则有

$$I_x = \frac{l(l-x)^3}{12} \quad (10)$$

1.3 归一化最大、最小法向应力表达式的建立

设偏心距为 e , 最大边距为 y , 剪切面上所施加的法向力为 P , 则剪切面上最大法向应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S'} + \frac{P \times e \times y}{I} \quad (11)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S'} \left(1 + \frac{S' \times e \times y}{I} \right) \quad (12)$$

设试样的剪切面积为 S , 则名义法向应力为

$$\sigma_0 = \frac{P}{S} \quad (13)$$

随剪切位移变化的法向应力为

$$\sigma = \frac{P}{S'} \quad (14)$$

则归一化修正法向应力为

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{P}{S'} \bigg/ \frac{P}{S} = \frac{S}{S'} \quad (15)$$

如果将式 (12) 进一步改写, 则有

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{P}{S'} \frac{S}{S'} \left(1 + \frac{S' \times e \times y}{I} \right) \\ &= \frac{P}{S} \frac{S}{S'} \left(1 + \frac{S' \times e \times y}{I} \right) \\ &= \sigma_0 \frac{S}{S'} \left(1 + \frac{S' \times e \times y}{I} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

如果用名义法向应力去归一化最大法向应力, 则有

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = \frac{S}{S'} \left(1 + \frac{S' \times e \times y}{I} \right) \quad (17)$$

则归一化最小法向应力为

$$\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_0} = \frac{S}{S'} \left(1 - \frac{S' \times e \times y}{I} \right) \quad (18)$$

在以上计算中:

对于圆形剪切面, 偏心距 $e = \frac{x}{2}$, 最大边距 $y = r - \frac{x}{2}$;

对于矩形剪切面, 偏心距 $e = \frac{x}{2}$, 最大边距 $y = s - \frac{x}{2}$;

对于正方形剪切面, 偏心距 $e = \frac{x}{2}$, 最大边距 $y = l - \frac{x}{2}$ 。

2 试样剪切面上法向应力分布特点分析

在直剪试验中, 通常是按不同级别的法向应力来加载进行剪切试验, 所以尽管试样剪切面大小、形状各异, 但总可以人为地将名义法向应力调整为几个恒定值。为了研究方便, 认为某一级载荷作用下名义法向应力值是相同的。如果按名

义法向应力去归一化, 可得最大、最小法向应力规格化值随剪切位移的变化关系曲线如图 3 所示。从图 3(a) 可以看出, 当试样剪切面为圆形时, 规格化法向应力随着剪切位移的增加而增加, 试样直径越大, 规格化法向应力则越小, 规格化最大法向应力与最小法向应力的差值也越小。由于考虑了剪切面积的修正, 所以最大、最小法向应力规格化值都大于 1。当试样直径为 50 cm 时, 最大、最小规格化法向应力随剪切位移的变化曲线几乎重合。从图 3(b) 可以看出, 当试样剪切面为方形时, 其变化规律同圆形, 但是最大与最小法向应力的差值要大很多, 最大与最小法向应力值基本上对称地分布于数值 1 的两侧, 当剪切面边长为 50 cm 时, 最大法向应力与最小法向应力并没有像圆形那样几乎重合, 而是随剪切位移的增大出现很大的应力剪刀差现象。从图 3(c) 可以看出当剪切面为矩形且剪切边长较长时, 对应的最大法向应力要小些、最小法向应力值则要大些, 而两者差值相对较小, 其剪刀差现象比剪切边长较短时要弱。

不同试样剪切面上规格化法向应力的对比情况如 4 所示。从图 4(a) 可以看出, 当试样剪切面的直径和边长相同时, 例如 $d = 6.18 \text{ cm}$, $L = 6.18 \text{ cm}$ 时, 方形剪切面上最大、最小规格化法向应力基本上以数值 1 为轴对称分布, 而圆形剪切面上规格化法向应力则随剪切位移的增大朝右上角方向发展, 其值都大于 1, 两者差值都比方形的小很多, 这说明在剪切过程中, 圆形剪切面上的法向应力分布较方形均匀, 因而其上的剪应力分布也相对均匀。从图 4(b) 可知, 当试样剪切面尺寸进一步增大时, 对于圆形剪切面, 当 $d = 50 \text{ cm}$ 时, 最大、最小规格化法向应力几乎重合, 所以, 当 $d = 50 \text{ cm}$ 时, 剪切面上的法向应力和剪应力分布都很均匀, 这样所得到的试验结果就更合理。

当试样的剪切面形状和尺寸都不一样时, 从图 4(c) 可以看出, 尽管方形剪切面的尺寸相对大 ($L = 20 \text{ cm}$), 而圆形的尺寸相对小 ($d = 10 \text{ cm}$), 但是方形剪切面上的最大、最小规格化法向应力的差值还是较圆形大很多。

当剪切面为矩形且剪切方向边长较大时, 对应试样剪切面上最大、最小法向应力间差值相对小。

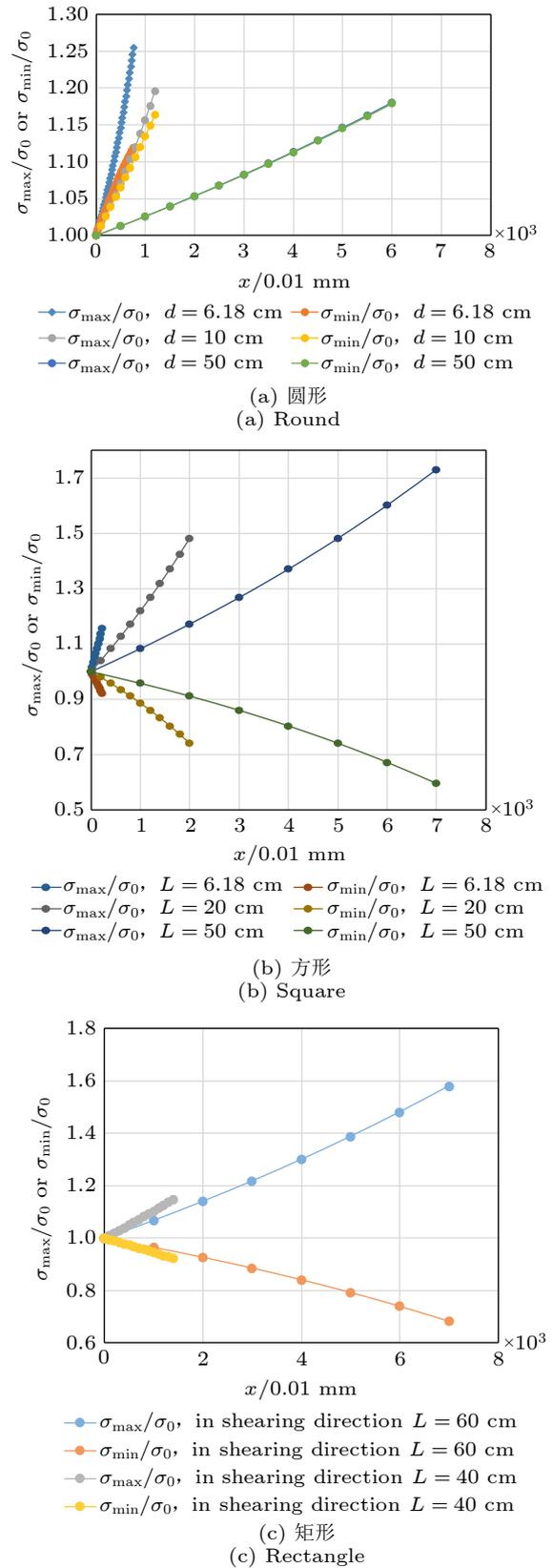


图 3 规格化最大法向应力、规格化最小法向应力随剪切位移变化关系曲线

Fig. 3 Normalized maximum normal stress or normalized minimum normal stress versus shear displacement curve

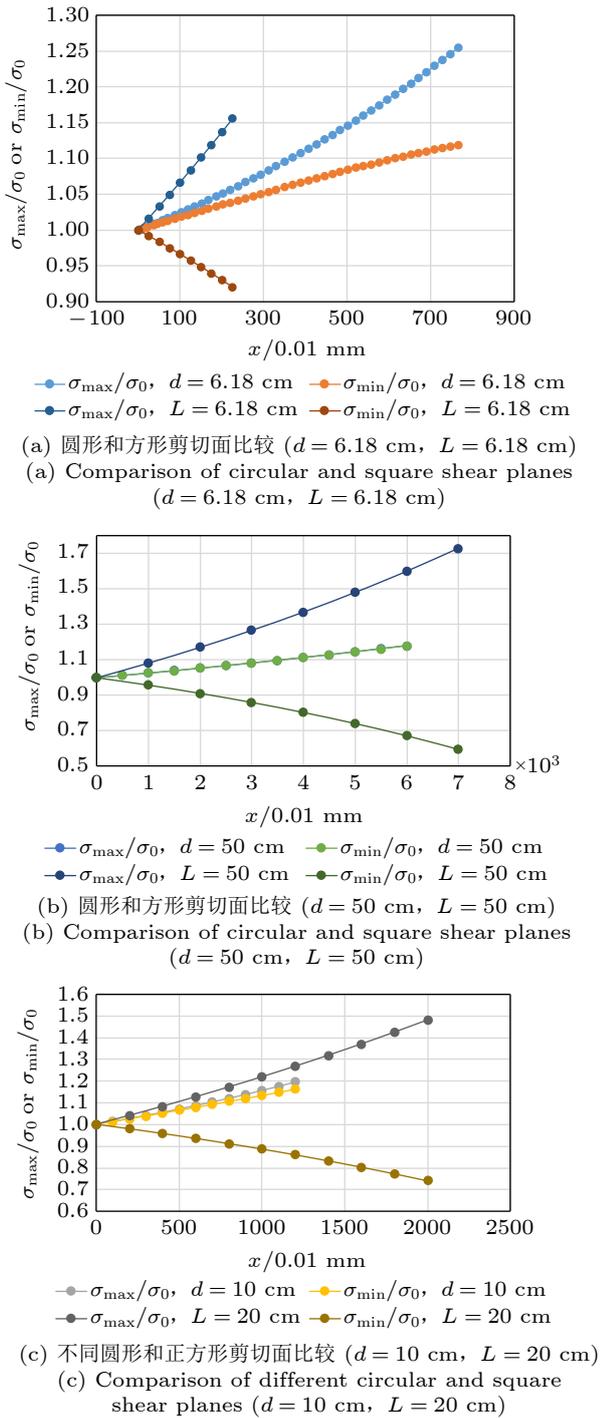


图4 归一化法向应力随剪切位移变化比较

Fig. 4 Comparison of normalized normal stress with shear displacement

3 试样剪切面上土的强度分析

谈到应力, 一般而言, 都是指一点的应力状态, 是对微单元体而言的, 认为是均匀的。进行应力测试, 也希望得到一点的应力。但是, 试样

有大有小, 且有一定的形状, 所以通过测试然后再计算整理出的应力, 一般为一点的平均应力, 因此当试样截面上最大、最小应力差别较小时, 整理计算得到的应力更接近真实值, 否则, 跟真实值差别较大。在直剪试验中, 通过施加法向应力, 并通过剪切位移, 进而激发土体的抗剪能力, 最终体现出土体的抗剪强度。由于土体剪切面上法向应力分布不均匀, 从而导致剪切面上的剪应力也是不均匀的, 所以要使剪切面上的剪应力均匀, 就必须使剪切面上的法向应力均匀, 也就是使剪切面上的最大、最小法向应力的差值尽可能的小, 这样得到的试验计算法向应力值就接近真实值, 从而得到的土的剪切强度就更合理。

综合前述计算结果, 可以得出这样的结论: 尽量选用剪切面为圆形的大样进行直剪试验。

4 结论

(1) 本文推导出了不同剪切位移下试样截面惯性矩表达式, 得到试样剪切面上最大、最小法向应力表达式。

(2) 归一化最大、最小法向应力及其差值随剪切位移的增大而增大, 随试样剪切面直径或剪切边长的增大而减小。

(3) 当试样剪切面直径和边长相同时, 圆形试样剪切面上的法向应力分布要比方形均匀。当试样剪切面为矩形, 沿矩形长边方向剪切时, 其上法向应力的分布要比沿短边方向剪切时均匀。

(4) 建议尽量选用剪切面为圆形的大样进行直接剪切试验。

参 考 文 献

- 雷胜友, 惠会清. 考虑剪切面积修正的土的剪应力-剪切位移及强度分析. 力学与实践, 2022, 44(3): 640-645
LEI Shengyou, HUI Huiqing. Analysis of shear stress-shear displacement curve and strength characteristics of soil considering shear area correction. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(3): 640-645 (in Chinese)
- 孙训方. 材料力学(上册). 北京: 高等教育出版社, 1984
SUN Xunfang. *Mechanics of Materials*. Beijing: China High Education Press, 1984 (in Chinese)

(责任编辑: 王永会)