关于模态综合法的注记

赵楚楚　陈立群[1)]

(上海大学力学与工程科学学院，上海 200444)
(上海大学上海市应用数学和力学研究所，上海 200444)

摘要　本文以两端固定直角梁为例，探讨模态综合法应用于计算高阶固有频率。单纯使用前 2 阶约束振型为假设振型时，可能出现频率遗漏而不能计算第 2 阶固有频率。假设振型同时取前 2 阶模态振型和前 2 阶约束振型，可以计算前 3 阶固有频率；假设振型取前 4 阶模态振型和前 4 阶约束振型，可以计算前 5 阶固有频率，相对误差小于 5%。

关键词　振动，模态综合，固有频率，振型

中图分类号: O312　　**文献标识码**: A　　doi: 10.6052/1000-0879-22-330

A NOTE ON THE METHOD OF MODE SYNTHESIS

ZHAO Chuchu　CHEN Liqun[1)]

(School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract　A right-angle beam with fixed both ends is treated as an example to investigate the application of the mode synthesis method for calculation of higher-order natural frequencies. If the first 2 constrained mode shapes serve as the assumed mode shapes, some frequencies may miss and thus the second-order natural frequency cannot be calculated. If the assumed mode shapes include both the first 2 modal shapes and the first 2 constrained mode shapes, the first 3 natural frequencies can be calculated; and the assumed mode shapes include both the first 4 modal modes and the first 4 constrained mode shapes, the first 5 order natural frequencies can be calculated with the relative errors less than 5%.

Keywords　vibration, mode synthesis, natural frequency, mode shape

模态综合法是将一个复杂结构分解成若干个较为简单的部分分别进行振动模态分析后，再综合成结构整体振动模态的有效近似分析方法。该方法的基本内容在振动理论[1-4]或结构动力学[5-6]的教材中有所介绍。在教材中通常用该方法近似计算基频。在计算更高阶频率时是否有效，很少涉及。本文通过对教材[4]例题中一个两端固定直角梁的分析，揭示该方法计算高阶固有频率时存在的问题，并探讨相应的解决方法。这些分析是对现有振动力学教学内容的补充和澄清，有助于帮助学生更全面地掌握模态综合法，也可以用作学生进行探究式学习的素材。

1　计算高阶固有频率时存在的问题

先看模态综合法的例子[4]。两根固定在 O_1 和 O_2 的相同直梁，长为 l，截面弯曲刚度为 EI，密度为 ρ，截面积为 S，在 O_3 处刚性联结为两端固定的直角梁，如图 1 所示。将这两根直梁作为子结构，分别以 O_1 和 O_2 为原点建立坐标系 (O_1-x_1y_1) 和 (O_2-x_2y_2)。采样固定界面模态综合法。选择满足几何边界条件的约束振型[4]

本文于 2022–05–27 收到。

1) 陈立群，教授，主要研究方向为振动控制和非线性动力学。E-mail：lqchen@shu.edu.cn

引用格式: 赵楚楚, 陈立群. 关于模态综合法的注记. 力学与实践, 2022, 44(5): 1179-1182
Zhao Chuchu, Chen Liqun. A note on the method of mode synthesis. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(5): 1179-1182

$$\tilde{\phi}_k(x_i) = \left(\frac{x_i}{l}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{x_i}{l}\right)\right]^k \quad (k = 1, 2;\ i = 1, 2) \tag{1}$$

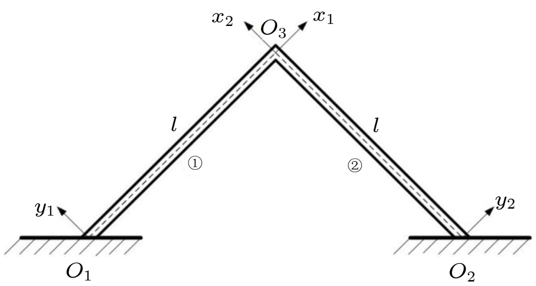


图 1　两端固定的直角梁

为假设振型，则由位移和弯矩协调条件，由假设振型法可以导出前 2 阶固有频率为 (教材 [4] 中仅给出第 1 阶固有频率)

$$\omega_1 = \frac{15.47}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \omega_2 = \frac{75.33}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2}$$

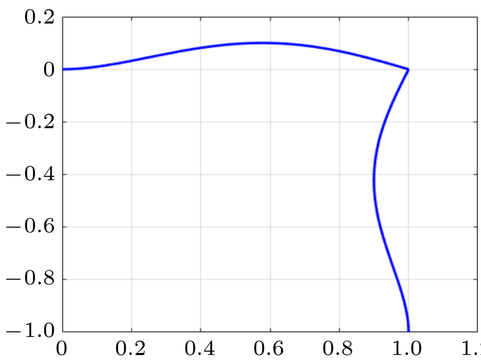
用有限元法验证上述固有频率的精确性。设 20#低碳钢的几何和物理参数为 $l = 1$ m, $D = 0.05$ m, $E = 205$ GPa, $\rho = 7840$ kg/m^3。式 (2) 给出的模态综合法得到

$$\omega_1^{\rm C2} = 157.18\,\rm Hz, \quad \omega_2^{\rm C2} = 766.35\,\rm Hz \tag{3}$$

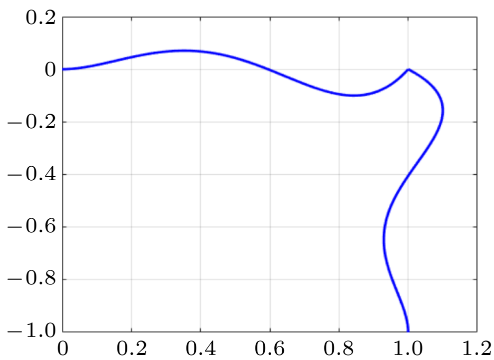
应用有限元软件 ANSYS 进行计算，得到前 6 阶固有频率为

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = 159.54\,\rm Hz, \quad \omega_2 = 234.68\,\rm Hz \\ \omega_3 = 507.20\,\rm Hz, \quad \omega_4 = 627.44\,\rm Hz \\ \omega_5 = 1012.90\,\rm Hz, \quad \omega_6 = 1090.30\,\rm Hz \end{array}\right\} \tag{4}$$

两者第 1 阶固有频率非常接近 (相对误差 1.48%)，用模态综合法得出的第 2 阶固有频率与第 4 阶固有频率较为接近 (相对误差 22.1%)。由模态综合法得到的前 2 阶振型如图 2 所示，有限元法得到的前 4 阶振型如图 3 所示。模态综合法的第 2 阶振型，与有限元法的第 3 阶振型接近。因此，模态综合法计算第 2 阶固有频率不准确的原因是漏掉了第 2 固有频率。



(a) 第 1 阶振型



(b) 第 2 阶振型

图 2　基于假设振型 (1) 的模态综合法所得到前 2 阶振型

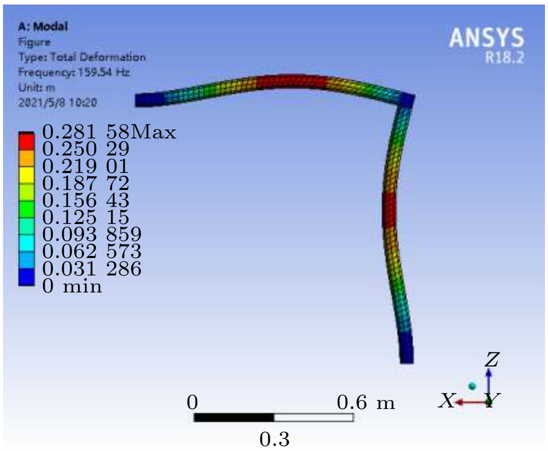
2　提高高阶固有频率的精度

从有限元计算得到的振型看，互成直角的两直梁对应的振型存在两种关系。其一是在平面内绕两段梁连接点旋转 90°后重合，如图 3(a) 和图 3(c)；另一种是关于直角的平分线对称，如图 3(b) 和图 3(d)。因此引入一组新的假设振型有望避免固有频率的遗漏。引入两端固定梁的前 n 阶模态的振型函数 $\phi_j(x_i)(j = 1, 2, \cdots, n;\ i = 1, 2)$ 作为假设振型。以前 2 阶约束振型和前 2 阶模态振型为假设振型，可以得到前 4 阶固有频率为

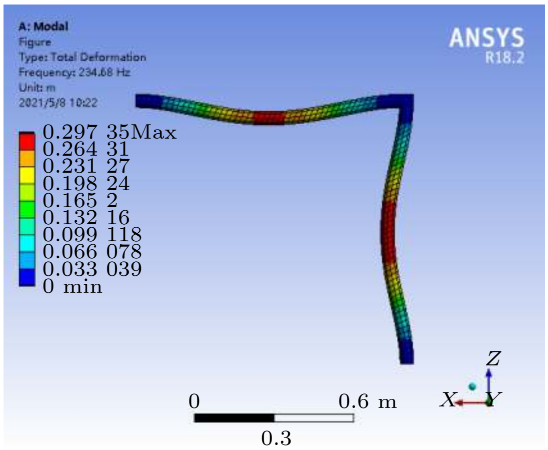
$$\left.\begin{array}{l} \omega_1^{\rm C2M2} = 156.85\,\rm Hz, \ \omega_2^{\rm C2M2} = 258.97\,\rm Hz \\ \omega_3^{\rm C2M2} = 508.50\,\rm Hz, \ \omega_4^{\rm C2M2} = 724.52\,\rm Hz \end{array}\right\} \tag{5}$$

虽然有 10.35% 的相对误差，但已经避免了第 2 阶固有频率的遗漏。第 3 阶固有频率相对误差只有 0.22%，但第 4 阶固有频率的相对误差为 15.47%。

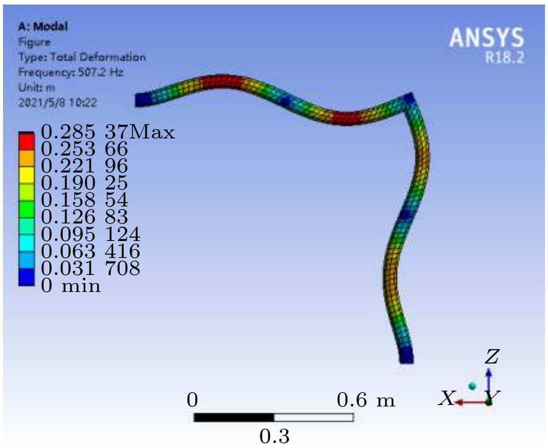
为进一步探讨假设振型选取对模态综合法的影响，考虑更多阶假设振型以计算前 4 阶固有频率。扩展式（1）给出的满足边界条件的约束振型到 k = 3,4 的情形。考虑假设振型的 4 种选择方式：（1）前 4 阶约束振型和前 4 阶模态振型；（2）前 4 阶约束振型和第 5 到 8 阶模态振型；（3）前 2 阶约束振型和前 4 阶模态振型；（4）前 2 阶约束振型和前 8 阶模态振型。计算的前 6 阶固有频率及其与有限元计算结果的相对误差如



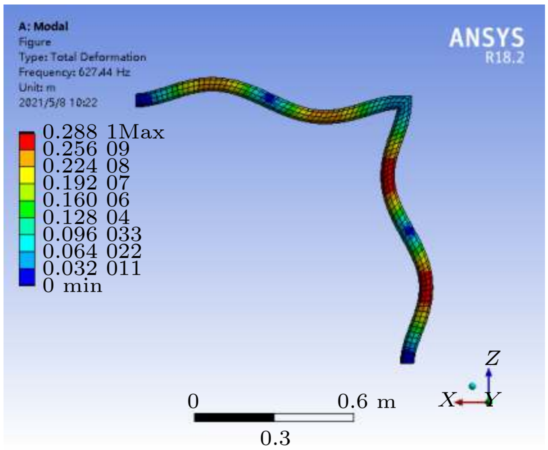
(a) 第 1 阶振型



(b) 第 2 阶振型



(c) 第 3 阶振型



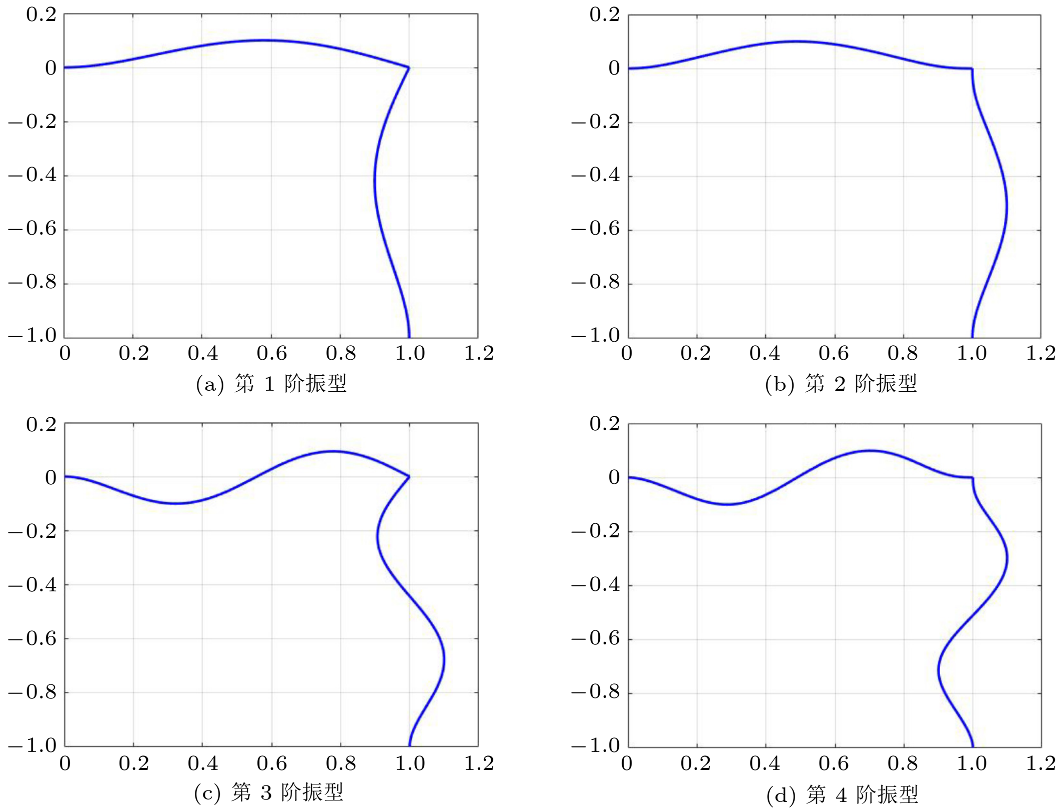
(d) 第 4 阶振型

图 3　有限元计算的前 4 节振型

表 1 所示。各种振型选择计算的第 1 阶固有频率相同，第 3 和 5 阶固有频率的第（1），（3）和（4）三种假设振型选取结果接近，但偶数阶即第 2, 4 和 6 阶固有频率同时用前 4 阶约束振型和模态振型的结果较为精确。这种选择下前 4 阶振型如图 4 所示。这些结果与图 3 所示有限元结果接近。第 6 阶固有频率误差较大，可能需要更多的假设振型。

表 1　不同假设振型下模态综合法计算的前 6 阶固有频率及相对误差

假设振型	$\tilde{\phi}_k\ (k=1,2,3,4)$ $\phi_j\ (j=1,2,3,4)$	$\tilde{\phi}_k\ (k=1,2,3,4)$ $\phi_j\ (j=5,6,7,8)$	$\tilde{\phi}_k\ (k=1,2)$ $\phi_j\ (j=1,2,3,4)$	$\tilde{\phi}_k\ (k=1,2)$ $\phi_j\ (j=1,...,8)$
1 阶固有频率 (相对误差)	156.85 (1.69%)	156.85 (1.69%)	156.85 (1.69%)	156.85 (1.69%)
2 阶固有频率 (相对误差)	234.96 (0.12%)	242.47 (3.32%)	244.67 (4.26%)	236.36 (0.71%)
3 阶固有频率 (相对误差)	508.29 (0.22%)	511.89 (0.92%)	508.30 (0.22%)	508.29 (0.22%)
4 阶固有频率 (相对误差)	648.65 (3.38%)	711.60 (13.41%)	679.72 (8.33%)	653.00 (4.07%)
5 阶固有频率 (相对误差)	1060.52 (4.70%)	1076.51 (6.28%)	1060.73 (4.72%)	1060.52 (4.70%)
6 阶固有频率 (相对误差)	1273.24 (16.78%)	1440.09 (32.08%)	1341.43 (23.03%)	1283.09 (17.68%)



(a) 第 1 阶振型 (b) 第 2 阶振型

(c) 第 3 阶振型 (d) 第 4 阶振型

图 4 模态综合法计算的前 4 阶振型

3 总结

本文以振动教材[4] 中的两端固定的直角梁为例，探讨模态综合法应用中存在的问题以及改进的措施。以满足几何边界条件的约束振型为假设振型计算固有频率时，可以出现频率遗漏的问题。同时采用约束振型和模态振型能取得较好的结果，采用前 2 阶约束振型和模态振型，能较为精确地计算前 3 阶固有频率；同时采用 4 阶约束振型和模态振型，能较为精确地计算前 5 阶固有频率。

参 考 文 献

1 Meirovitch L. Principles and Techniques of Vibrations. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1997

2 方同, 薛璞. 振动理论及应用. 西安: 西北工业大学出版社, 1998

3 Ginsberg JH. Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons, 2001

4 刘延柱, 陈立群, 陈文良. 振动力学, 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019

5 李东旭. 高等结构动力学, 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2010

6 于开平, 邹经湘. 结构动力学, 第 3 版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2015

(责任编辑: 胡 漫)