H 形钢梁考虑有限翘曲约束刚度的扭转效应分析¹⁾

陈东亮 张元海2)

(兰州交通大学土木工程学院,兰州 730070)

摘要 为考虑半刚性连接对 H 形钢梁翘曲变形的有限约束,引入翘曲约束刚度的概念,提出介于简单支 承和固定支承之间的半刚性连接 H 形钢梁约束扭转计算方法。结合数值算例,验证本文方法的正确性,详细 分析翘曲约束刚度变化对翘曲正应力和二次剪应力的影响。研究结果表明:翘曲约束刚度引起的双力矩沿跨 度呈线性变化,翘曲正应力随翘曲约束刚度的增大而减小,二次剪应力随翘曲约束刚度的增大而 增大。

关键词 H 形钢梁,半刚性连接,翘曲约束刚度,约束扭转
 中图分类号: TU391,TU313.1 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-22-258

ANALYSIS ON TORSIONAL EFFECT OF H-SHAPED STEEL BEAMS CONSIDERING FINITE WARPING RESTRAINT STIFFNESS¹⁾

CHEN Dongliang ZHANG Yuanhai²⁾

(School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract In order to consider the finite constraint of semi-rigid connections on the warping deformation of H-shaped steel beams, the concept of warping constraint stiffness is introduced, and a restrained torsion calculation method for semi-rigid connected H-shaped steel beams between simple support and fixed support is proposed. Combined with numerical examples, the correctness of this method is verified, and the effects of the change of warping constraint stiffness on warping normal stress and secondary shear stress are analyzed in detail. The results show that the bi-moment caused by the warping restraint stiffness changes linearly along the span. The warping normal stress decreases with the increase of warping constraint stiffness, and the secondary shear stress increases with the increase of warping constraint stiffness.

Keywords H-shaped steel beam, semi-rigid connection, warping restraint stiffness, restrained torsion

符拉索夫根据开口薄壁构件的变形特点,针 对约束扭转作出刚周边假定和中面无剪应变假定, 并采用扇性坐标建立了开口薄壁构件的约束扭转 微分方程^[1]。樊春雷等^[2]指出传统计算方法过于 繁琐,致使许多设计师仅在构造上做一些处理, 因此他基于变形协调原理提出了一种 H 型钢梁约 束扭转简化计算方法。如今,钢制曲线梁桥在高 速公路和铁路中大量使用,在任何情况下,曲线 梁都会受到与弯曲相关的扭矩作用,研究人员基 于哈密顿原理提出了H形钢梁约束扭转效应的评 估方法^[3]。通常在解决约束扭转问题时只考虑自 由翘曲和完全约束翘曲两种情况,而实际中往往 是部分约束翘曲变形的半刚性连接。近几年,对 于半刚性连接的受力性能,学者们开展了大量研

²⁰²²⁻⁰⁴⁻²⁷ 收到第1稿, 2022-05-28 收到修改稿。

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目 (51968040, 51468032)。

²⁾ 张元海, 教授, 主要从事薄壁箱梁设计理论研究。E-mail: zyh17012@163.com

引用格式:陈东亮,张元海.H形钢梁考虑有限翘曲约束刚度的扭转效应分析.力学与实践,2023,45(2):389-394

Chen Dongliang, Zhang Yuanhai. Analysis on torsional effect of H-shaped steel beams considering finite warping restraint stiffness. *Mechanics in Engineering*, 2023, 45(2): 389-394

究工作^[4-7]。在大多数情况下,假定刚性连接是不 合理的,可能会导致不安全的设计,而假定简单 连接又过于保守。AISC设计规范^[8]包括半刚性 连接类别,该类别比刚性连接和简单连接更具现 实意义。Areiza-Hurtado等^[9]对弹性地基上具有 初始横向挠度和半刚性端部连接的棱柱形梁柱进 行了二阶分析。Montoya-Vargas等^[10]推导了半 刚性连接工字梁的约束扭转计算公式,并与Hunt^[11] 的理论和试验进行对比。尽管已有科研人员在弯 曲分析中考虑了半刚性连接的影响,但鲜有人将 半刚性连接纳入结构扭转分析。

为了考虑半刚性连接对 H 形钢梁翘曲变形的 有限约束,提出翘曲约束刚度的概念,推导半刚 性连接 H 形钢梁约束扭转的广义位移和广义内力 计算公式,并分析翘曲正应力和二次剪应力随翘 曲约束刚度的变化规律。

1 翘曲约束刚度

以梁腹板与柱翼缘双角钢加角钢支托的螺栓 连接为例,说明半刚性连接 H 形钢梁计算模型的 简化过程。图 1(a)~图 1(c)均为通过双角钢和螺 栓连接到柱翼缘的梁,连接处梁不能发生整体扭 转。图 1(a)允许梁端翼缘自由翘曲,图 1(b)约束 梁端下翼缘的部分翘曲变形,图 1(c)同时约束梁 端上下翼缘的部分翘曲变形。由相容性条件可知, 图 1(b)和图 1(c)梁中受约束的翼缘在面内弯曲 的同时必须伴随柱中翼缘的扭转和腹板的变形, 但受约束翼缘翘曲变形的发展程度小于图 1(a)中 自由翘曲的情况。倘若柱的刚度比梁的刚度大得 多,则在约束处梁翼缘几乎不会发生翘曲变形。

根据上述变形特点,为考虑半刚性连接有限 约束 H 形钢梁翼缘翘曲变形的情况,用线弹性弹 簧简化实际中的半刚性连接。基于图 1(c),以左 支撑 P 为原点,取图 2 所示梁支撑附近无限小的 单元。在约束处不允许梁发生整体扭转,但允许 翼缘局部变形。若两块翼缘板端部的弹簧刚度为 零,则可以考虑图 1(a)的情况;若上翼缘板端部 的弹簧刚度为零,则可以考虑图 1(b)的情况。

在扭矩载荷作用下,梁翼缘发生翘曲位移*u*, 从而在梁端连接弹簧的点处产生与翘曲位移相反 的反作用力*F*,假设线弹性弹簧的刚度为*k*,则



根据符拉索夫的刚周边假定和中面无剪应变假定, 开口薄壁梁的翘曲位移为

$$u(x, y, z) = -\varphi'(z)\omega(x, y)$$
(2)

式中 $\omega(x, y)$ 为主扇形坐标; $\varphi'(z) = d\varphi/dz$ 为扭率, φ 表示扭转角。



Fig. 2 Schematic diagram of girder unit near the support

记 $\varphi'(0) = \varphi'_p$,则 P 截面弹簧的反作用力 F_P 为

$$F_P(x,y) = k\varphi'_P\omega(x,y) \tag{3}$$

P截面弹簧反作用力产生的双力矩 BP 为

$$B_P = \sum_{i=1}^{n} F_i \omega_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i^2 \varphi'_P \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$
 (4)

式中, k_i表示第 i 个弹簧的刚度, ω_i表示第 i 个 弹簧所在位置的主扇性坐标。

定义翘曲约束刚度 *S*等于每单位扭转角的双 力矩,即

$$S = \sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i^2 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$
(5)

式中S的量纲为 L^4MT^{-2} (角度没有量纲)。

式(5)能够通过考虑连接件的位置和刚度, 确定螺栓或点焊等离散连接件的翘曲约束刚度。 值得注意的是,由于 *S* 是 *ω* 的函数,所以可通过 改变连接元件的位置提高翘曲约束刚度。

2 翘曲正应力和二次剪应力

由于壁厚 t 较小,可以认为翘曲正应力和二 次剪应力沿壁厚均匀分布。由式(2)得,约束 扭转翘曲正应力 σω 和相应的双力矩 B 分别为

$$\sigma_{\omega} = -E\varphi''\omega \tag{6}$$

$$B = \int_{s} \sigma_{\omega} \omega t \mathrm{d}s = -E I_{\omega} \varphi'' \tag{7}$$

式中 E 为弹性模量。所以翘曲正应力又可以写成

$$\sigma_{\omega} = \frac{B}{I_{\omega}}\omega\tag{8}$$

式中 I_{ω} 为主扇性惯性矩, $I_{\omega} = \int_{s} \omega^{2} t ds$ 。

将曲线坐标起始点 s = 0 置于上翼缘形心处, 在翼缘上任取一个 $dz \times ds$ 的微元体,其受力情 况如图 3 所示。由微元体 z 方向的平衡可得

$$\frac{\partial q_{\omega}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{\omega}}{\partial z}t = 0 \tag{9}$$

将式(6)代入式(9)并积分,可以得到约束扭转剪力流 q_w和相应的二次扭矩 M_w分别为

$$q_{\omega} = E\varphi^{\prime\prime\prime}S_{\omega} \tag{10}$$

$$M_{\omega} = \int_{S} q_{\omega} \rho \mathrm{d}s = -E I_{\omega} \varphi^{\prime \prime \prime} \tag{11}$$

式中 S_{ω} 为主扇性静面矩, $S_{\omega} = \int_{0}^{s} \omega t ds$; ρ 为 扭转中心至壁厚中心线任一点处切线的垂直 距离。

联立式(10)和式(11)可得二次剪应力τω为

$$\tau_{\omega} = \frac{q_{\omega}}{t} = -\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}t}S_{\omega} \tag{12}$$



图 3 H 形钢梁微元体受力简图 Fig. 3 Simplified diagram of micro-body force of H-shaped steel beam

3 约束扭转微分方程及其初参数解

根据开口薄壁梁约束扭转经典理论⁶,关于 扭转角 φ 的约束扭转微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}z^4} - p^2 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{1}{EI_\omega} \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}z} \tag{13}$$

式中 M_z 为扭矩,以力矢指向截面外侧为正; $p = \sqrt{GJ/(EI_\omega)}$,G为剪切模量,J为抗扭惯性矩。

令 $dM_z/dz = 0$,即不考虑外载荷作用,可得

$$\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}z^4} - p^2 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{14}$$

引入四个初参数,分别为坐标原点处 (z = 0)的扭转角 φ_0 、扭率 φ'_0 、双力矩 B_0 和总扭矩 T_0 。则用四个初参数表达的任意横截面的扭转角 $\varphi(z)$, 扭率 $\varphi'(z)$,双力矩 B(z)及总扭矩 M(z)分别为

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{p} \sinh(pz) + \frac{B_0}{GJ} \left[1 - \cosh(pz)\right] + \frac{T_0}{pGJ} \left[pz - \sinh(pz)\right]$$
(15)

$$\varphi'(z) = \varphi'_0 \cosh{(pz)} - \frac{pB_0}{GJ} \sinh{(pz)} + \frac{T_0}{GJ} \left[1 - \cosh{(pz)}\right]$$
(16)

$$B(z) = -\frac{\varphi_0'GJ}{p}\sinh\left(pz\right) + B_0\cosh\left(pz\right) + \frac{T_0}{p}\sinh\left(pz\right)$$
(17)

$$M(z) = T_0 \tag{18}$$

如图 4 所示,长度为 *l* 的半刚性连接 H 形钢 梁承受满跨均布扭矩载荷 *m*,*m* 作用于剪切中 心。分别用 *S*_P和 *S*_Q表示 *P* 端和 *Q* 端的翘曲约 束刚度。



图 4 半刚性连接 H 形钢梁受均布扭矩载荷作用 Fig. 4 H-shaped steel beam with semi-rigid connections subjected to uniform torque load

根据边界条件,显然有 $\varphi_0 = 0$, $\varphi(l) = 0$ 。 由于 P端弹簧在负面上,Q端弹簧在正面上,所 以由式(4)和式(5)得

$$B_0 = -B_P = -S_P \varphi_0' \tag{19}$$

$$B(l) = B_Q = S_Q \varphi'(l) \tag{20}$$

其中正面指的是外法线指向 z 轴正方向的截面。

根据上述边界条件可以得到

$$T_{0} = \frac{1}{2}ml + \frac{S_{P}\varphi'_{0} + S_{Q}\varphi'(l)}{l}$$
(21)

 $T_0 \neq 1/(2ml)$ 是因为 B_P 和 B_Q 会引起跨内变化的双力矩。不难看出, B_P 和 B_Q 引起的二次扭矩 $M_{l\omega}$ 为

$$M_{l\omega} = \frac{\mathrm{d}B_l(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{B_P - B_Q}{l} \tag{22}$$

所以 B_l(z) 沿跨度呈线性变化

$$B_l(z) = B_P\left(1 - \frac{z}{l}\right) + B_Q\frac{z}{l} \tag{23}$$

由上述边界条件可得,初参数满足的方程组为

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{cases} \varphi_0 \\ \varphi'_0 \\ B_0 \\ T_0 \end{cases} = \begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ (24) \end{cases}$$

其中 $C_{11} = C_{23} = 1$

$$\begin{split} C_{12} &= C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{24} = C_{31} = C_{41} = 0\\ C_{22} &= S_P; \ C_{32} = pGJ\sinh\left(pl\right)\\ C_{33} &= p^2\left[1 - \cosh\left(pl\right)\right]; \ C_{34} = p\left[pl - \sinh\left(pl\right)\right]\\ C_{42} &= -pGJ\left[GJ\sinh\left(pl\right) + pS_Q\cosh\left(pl\right)\right]\\ C_{43} &= p^2\left[GJ\cosh\left(pl\right) + pS_Q\sinh\left(pl\right)\right]\\ C_{44} &= p\left[GJ\sinh\left(pl\right) - pS_Q + pS_Q\cosh\left(pl\right)\right]\\ D_1 &= D_2 = 0; \ D_3 &= m\left[1/2p^2l^2 + 1 - \cosh\left(pl\right)\right]\\ D_4 &= -m\left[GJ + p^2lS_Q - GJ\cosh\left(pl\right) - pS_Q\sinh\left(pl\right)\right] \end{split}$$

当结构对称载荷对称时,显然可得 $S_P = S_Q = S$, $\varphi'(l) = -\varphi'_0$,进而四个初参数的解可 以简化为

$$\begin{aligned}
\varphi_{0} &= 0 \\
\varphi'_{0} &= \frac{m \left[2 \cosh \left(pl \right) - pl \sinh \left(pl \right) - 2 \right]}{2p^{2}S \left[1 - \cosh \left(pl \right) \right] - 2pGJ \sinh \left(pl \right)} \\
B_{0} &= \frac{mS \left[2 + pl \sinh \left(pl \right) - 2 \cosh \left(pl \right) \right]}{2p^{2}S \left[1 - \cosh \left(pl \right) \right] - 2pGJ \sinh \left(pl \right)} \\
T_{0} &= \frac{1}{2}ml
\end{aligned}$$
(25)

显然, S 等于 0 时, $B_0 = 0$, 等于简支端的初参数; S 趋于∞时, $\varphi'_0 = 0$, 等于固定端的初参数。 说明半刚性连接介于简单支承和固定支承之间。

由于 B_P 和 B_Q 仅表示弹簧反作用力产生的 双力矩,沿跨内并未施加双力矩,所以任一横截 面的广义位移和广义内力为

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{p} \sinh(pz) + \frac{B_0}{GJ} \left[1 - \cosh(pz)\right] + \frac{T_0}{pGJ} \left[pz - \sinh(pz)\right] - \frac{m}{p^2GJ} \left[\frac{1}{2}p^2z^2 + 1 - \cosh(pz)\right]$$
(26)

$$\varphi'(z) = \varphi'_{0} \cosh(pz) - \frac{pB_{0}}{GJ} \sinh(pz) + \frac{T_{0}}{GJ} [1 - \cosh(pz)] - \frac{m}{pGJ} [pz - \sinh(pz)]$$
(27)

$$B(z) = -\frac{\varphi_0' GJ}{p} \sinh(pz) + B_0 \cosh(pz) + \frac{T_0}{p} \sinh(pz) + \frac{m}{p^2} [1 - \cosh(pz)]$$
(28)

$$M(z) = T_0 - mz \tag{29}$$

4 数值算例及分析

H 形钢梁的约束情况及受载荷情况与图 4 相同,取l = 16 m,m = 4 kN·m/m。图 5 为H 形钢梁的横截面尺寸与扭转特性,以及梁端用来约束翘

曲位移的线弹性弹簧在横截面中的投影位置。假设 弹簧刚度 k = 4000 kN/m,则 $S = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{rad}$ 。





按照本文所述理论求得距 P 端 1 m 处正面上的翘曲正应力和二次剪应力的分布曲线如图 6 所示。





为了验证本文的正确性,再使用有限元软件 ANSYS中的SHELL181壳单元计算该H形钢梁 距左支撑1m处正截面上各板元的翘曲正应力和 二次剪应力,并与图6中相应计算点的应力作比 较,计算结果见表1。因为H形钢梁自由扭转时 不会形成剪力流,中面自由扭转的剪应力为0, 所以可直接提取中面剪应力作为本文二次剪应力 的ANSYS解,由表1可知,本文解与ANSYS 解吻合良好。

为研究翘曲约束刚度对不同截面翘曲正应力 和二次剪应力的影响,令翘曲约束刚度从0起始 以 3000 kN·m³/rad 为步长逐渐增大至 60000 kN·m³/rad,计算 z = 1 m, z = 3 m, z = 5 m 和 z = 7 m 四个横截面上计算点1处的翘曲应力, 变化曲线如图 7 和图 8 所示。

在图 7 和图 8 中,当翘曲约束刚度 S 等于 0 时,梁端约束相当于简单支承,翘曲应力与相 应简支梁相同;当翘曲约束刚度 S 趋于∞时,梁 端约束相当于固定支承,翘曲应力如图中点划线 所示。当计入应力的正负号时,翘曲正应力随翘 曲约束刚度的增大而减小,二次剪应力随翘曲 约束刚度的增大而增大,且翘曲正应力较二次剪 应力受翘曲约束刚度的影响更显著。当 $S \ge$ 20000 kN·m³/rad 后,随着翘曲约束刚度增大, 翘曲应力变化不再明显。

比较 z = 1 m 至 z = 7 m 的应力变化曲线不难 得出,越靠近支点截面,翘曲约束刚度对翘曲正应 力和二次剪应力的影响越显著;越靠近跨中截面, 翘曲约束刚度对翘曲正应力和二次剪应力的影响越 小。在全跨范围内不能忽略翘曲约束刚度对翘曲 正应力的影响;而在大约距跨中 *l*/4 的范围内可 以忽略翘曲约束刚度对二次剪应力的影响。

	表1 数值分析结果比较
Table 1	Comparisons of numerical analysis results

Stress	Calculation points	Solution of this paper/MPa	Solution of ANSYS/MPa	Relative error/ $\%$
σ_{ω}	1	3.8032	3.9981	-4.9
	2	7.6064	8.0390	-5.4
$ au_{\omega}$	1	1.4422	1.4440	-0.1
	2	0.9014	0.8782	2.6

Note: relative error =(solution of this paper-solution of ANSYS) / solution of ANSYS $\times 100\%$.





warping constraint stiffness



图 8 _____ 八妈应力随翘曲约束刚度变化曲线 Fig. 8 Variation curve of secondary shear stress with warping constraint stiffness

5 结论

(1)本文引入翘曲约束刚度考虑半刚性连接 对翘曲变形的有限约束,在自由翘曲的简单支承 和完全约束翘曲的固定支承之间建立了平滑的过 渡,为半刚性连接H形钢梁约束扭转提供了计算 方法。

(2) 弹簧反作用力产生的双力矩沿跨度呈线 性变化。在实际工程中,可以适当改变螺栓或点 焊等连接件的位置提高翘曲约束刚度,改善构件 的受力性能。

(3)翘曲正应力随翘曲约束刚度的增大而减小,二次剪应力随翘曲约束刚度的增大而增大。 在H形钢梁全跨范围内不能忽略翘曲约束刚度对 翘曲正应力的影响;而在距跨中大约 l/4 的范围 内可以忽略翘曲约束刚度对二次剪应力的影响。



1 包世华,周坚. 薄壁杆件结构力学. 北京:中国建筑工业出版社, 2006

Bao Shihua, Zhou Jian. Structural Mechanics of Thin-Walled Bar. Beijing: China Architecture and Building Press, 2006 (in Chinese)

- 2 樊春雷,郝际平,田炜烽.H型截面钢梁约束扭转的简化计算.工 程力学,2013,30(11):180-184,220 Fan Chunlei, Hao Jiping, Tian Weifeng. Simple calculation method for H-type steel beam under the restrained torsion. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(11): 180-184, 220 (in Chinese)
- 3 Michele FG. Analysis of non-uniform torsion in curved incrementally launched bridges. *Engineering Structures*, 2014, 75: 374-387
- 4 门进杰,王家琛,樊冠磊等.RCS梁柱节点半刚性连接弯矩-转 角关系模型研究.土木工程学报,2020,53(10):36-50 Men Jinjie, Wang Jiachen, Fan Guanlei, et al. Moment- rotation model of semi-rigid connection of RCS beam-column assembly. *China Civil Engineering Journal*, 2020, 53(10):36-50 (in Chinese)
- 5 蒋玉川, 徐双武, 李章政等. 具有半刚性节点性质的平面刚架弹 簧单元的研究. 力学与实践, 2012, 34(4): 31-34, 30 Jiang Yuchuan, Xu Shuangwu, Li Zhangzheng, et al. Study of plane frame of spring element with property of semi-rigid joint. *Mechanics in Engineering*, 2012, 34(4): 31-34, 30 (in Chinese)
- 6 康子恒, 王森林, 杜喜凯等. T形钢连接半刚性梁柱节点受力性 能研究. 建筑结构学报, 2020, 41(S1): 44-54

Kang Ziheng, Wang Senlin, Du Xikai, et al. Study on mechanical behavior of semi-rigid beam-column joints with Tsection connections. *Journal of Building Structures*, 2020, 41(S1): 44-54 (in Chinese)

- 7 王宁, 王来, 冯建龙等. 基于能量法的半刚性钢框架连续倒塌抗 力分析. 力学与实践, 2018, 40(2): 188-193
 Wang Ning, Wang Lai, Feng Jianlong, et al. Energy-based progressive collapse resistance analysis of steel frame structures with semi-rigid connections. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(2): 188-193 (in Chinese)
- 8 Committee AISC. Specification for Structural Steel Buildings (ANSI/AISC 360–16). Chicago-Illinois: American Institute of Steel Construction, 2016
- 9 Areiza-Hurtado M, Aristizábal-Ochoa JD. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections. *Structures*, 2019, 20: 134-146
- 10 Montoya-Vargas S, Aristizabal-Ochoa JD. Torsion of prismatic I-beams with partially restrained warping at the end supports: bending analogy method. *Engineering Structures*, 2019, 180: 621-629
- 11 Hunt F. The Suppression of Warping in Thin-walled Beams. [Master Thesis]. Ohio: State University, 1973

(责任编辑:王永会)