

## 关于自行车的稳定性

刘延柱<sup>1)</sup>

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

**摘要** 叙述自行车稳定性传统理论受到质疑和新理论提出的过程. 解释影响自行车稳定性的离心力效应、陀螺效应, 和新提出的脚轮效应的力学原理.

**关键词** 自行车稳定性, 离心力效应, 陀螺效应, 脚轮效应

2012 年 1 月, 美国的网络版科普杂志 Discover Magazine 评选了 2011 年全球 100 个顶尖科学故事. 其中“自行车的新物理”荣居第 26 位<sup>[1]</sup>. 作为最普及的大众交通工具, 自行车骑行起来为何能稳定不倒的问题于是再度吸引了公众的注意.

自行车发明至今已有两百多年. 关于自行车力学原理的研究和讨论也有同样悠久的历史, 发表的文献已近百篇. 早在 1899 年, 法国数学家 Carvallo 和剑桥学生 Whipple 各自独立发表了自行车力学的研究论文<sup>[2-3]</sup>. 同时代的 Appell 将自行车运动作为非完整约束问题收进经典力学著作 *Traité de Mécanique Rationnelle*, 离心惯性力被视为稳定自行车的重要因素<sup>[4]</sup>(图 1). 1911 年 Klein 和 Sommerfeld 在陀螺力学著作中用陀螺效应解释自行车的稳定性<sup>[5]</sup>. 1948 年 Timoshenko 和 Young 的教材 *Advanced Dynamics* 作了 5 页半纸的数学推导, 认为离心力效应比陀螺效应更为重要<sup>[6]</sup>. 1959 年 Grammel 在分析陀螺效应的同时, 还注意到前叉转轴与地面接触点的位置对稳定性的影响<sup>[7]</sup>. 国内科普文章对自行车稳定性的解释也离不开离心力效应和陀螺效应的传统观点.



图 1 Appell 分析自行车运动的插图

离心力效应和陀螺效应虽已流行了上百年, 但关于自行车稳定性原理的讨论至今仍在继续. 1970 年英国一位化学家 Jones 对传统的陀螺效应解释产生了怀疑. 他设计了一辆前轮无陀螺效应的特殊自行车, 就是在前轮上并排安装了

个同样大小但不接触地面的轮子. 两个轮子同方向旋转时可产生加倍的陀螺效应, 如反向旋转则陀螺效应被抵消为零. 奇怪的是这两种情况对自行车的稳定性并无太大影响. 骑行无陀螺效应的自行车, 即使双手脱把也照样能稳定不倒<sup>[8]</sup>(图 2). 他的论文于 2006 年被重新刊出, 多处被引用和讨论, 掀起了一股重新认识自行车稳定原理的热潮<sup>[9-12]</sup>.

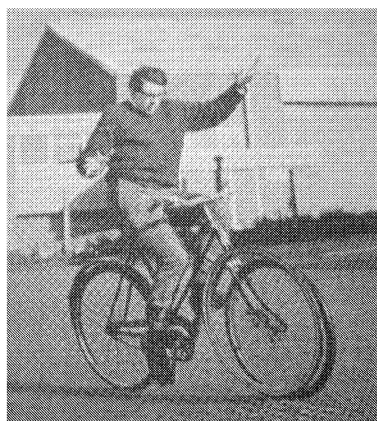


图 2 Jones 的无陀螺效应自行车

要深入了解自行车的稳定性原理, 仅靠物理概念的推理是不够的, 还需要作严格的力学和数学分析. 自行车是由车架、前叉和前后轮 4 个部分组成的刚体系. 为避免公式推导过繁, 近似地假定前叉转轴与地面垂直, 且通过前轮与地面的接触点. 设  $O_1$  和  $O_2$  为后轮和前轮与地面的接触点, 以  $O_1$  为原点建立参考坐标系  $(O_1-xyz)$ .  $x$  轴沿后轮轮胎的切线轴指向  $O_2$ ,  $y$  轴为垂直轴,  $z$  轴是与  $O_1O_2$  正交的水平轴. 设前后轮均在地面上作纯滚动,  $(O_1-xyz)$  随  $O_1$  点以速度  $v$  沿  $x$  轴匀速平动, 可视为惯性坐标系. 设  $(O_1-xyz)$  绕  $x$  轴逆时针转过  $\theta$  角后的位置为  $(O_1-x_1y_1z_1)$ ,  $y_1$  轴平行于前叉转轴, 与  $x_1$  轴组成车架的对称平面. 将  $(O_1-x_1y_1z_1)$  的原点移至  $O_2$ , 设  $(O_2-x_1y_1z_1)$  绕  $y_1$  轴顺时针转过  $\psi$  角后的位置为  $(O_2-x_2y_2z_2)$ ,  $y_2$  轴为前叉转轴, 与沿前轮轮胎切线的  $x_2$  轴组成前叉的对称平面(图 3). 车架倾角  $\theta$  和前叉转角  $\psi$  均为小量, 计算中仅保留其一阶项.

设车体连骑车人的总质量为  $m$ ,  $O_1$  与  $O_2$  的距离为  $a$ , 质心  $O_c$  的直立高度为  $h$ , 在  $O_1x$  轴上的投影与  $O_1$  的距离为  $b$ . 前轮偏角  $\psi$  的出现使自行车转为曲线运动, 曲率中心即瞬时速度中心  $O$ , 由  $O_1$  和  $O_2$  处与轮胎正交的水平线交点确定(图 4). 质心运动的曲率半径  $R$  近似等于  $O_1$  至瞬心

本文于 2012-02-28 收到.

1) E-mail: liuyzhc@gmail.com

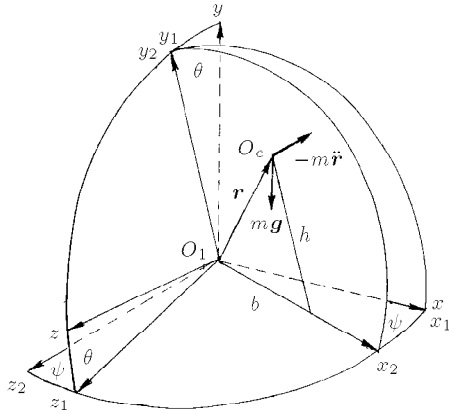


图 3 参考坐标系

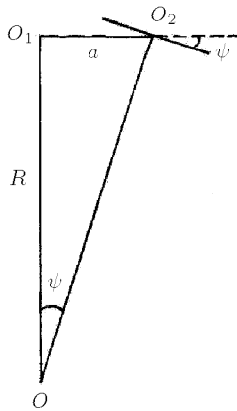


图 4 运动轨迹的曲率半径

O 的距离, 满足

$$R\psi = a \tag{1}$$

设  $r$  为  $O_c$  相对  $O_1$  的矢径,  $\omega$  为车体的角速度, 其绕水平轴和垂直轴的分量分别为  $\dot{\theta}$  和  $-\dot{\varphi}$ ,  $i, j, k$  为  $x, y, z$  各轴的基矢量, 则有

$$r = bi_1 + hj_1, \quad \omega = \dot{\theta}i_1 - \dot{\varphi}(j_1 - \theta k_1) \tag{2}$$

其中,  $\dot{\varphi} = U/R$ , 以  $(O_1-x_1y_1z_1)$  为动参考坐标系, 计算质心  $O_c$  的速度  $\dot{r} = v + \omega \times r$  和加速度  $\ddot{r}$ , 导出

$$\dot{r} = vi_1 + (h\dot{\theta} + b\dot{\varphi})k_1, \quad \ddot{r} = (h\ddot{\theta} + b\ddot{\varphi} + v\dot{\varphi})k_1 \tag{3}$$

假定自行车的质量全部集中在质心  $O_c$ , 列写车体在重力  $mg$  和包括离心力在内的惯性力  $-m\ddot{r}$  作用下对  $O_1x$  轴的动量矩定理

$$[r \times (mg - m\ddot{r})] \cdot i = 0 \tag{4}$$

将式 (3) 和  $\dot{\varphi} = v/R$  代入上式, 利用式 (1) 消去  $R$ , 导出车体绕水平轴转动的动力学方程

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{h} \left[ \left( \frac{bv}{ga} \right) \dot{\psi} + \left( \frac{v^2}{ga} \right) \psi - \theta \right] = 0 \tag{5}$$

此方程包含两个未知变量  $\theta$  和  $\psi$ , 要使方程有解还必须补充车架倾角  $\theta$  与前叉转角  $\psi$  之间的对应关系. 考虑骑车人对

车把的控制, 是使前叉带动前轮向车架倾斜方向转动. 这种控制作用可用简化的线性规律表示为

$$\psi = k\theta \tag{6}$$

代入方程 (5), 化作  $\theta$  的线性微分方程

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{h} \left\{ \left( \frac{kbv}{ga} \right) \dot{\theta} + \left[ \left( \frac{kv^2}{ga} \right) - 1 \right] \theta \right\} = 0 \tag{7}$$

利用常微分方程知识很容易判断,  $\theta$  的零解稳定性取决于参数  $k$  的数值,  $k > ga/v^2$  时为渐进稳定,  $k < ga/v^2$  时不稳定. 骑车人只要有足够的控制技巧就能满足此稳定性条件, 使倾斜的自行车恢复直立. 车速越快,  $k$  的稳定值下限就愈小, 自行车就愈容易稳定. 以上分析解释了离心力效应对自行车稳定性的作用原理, 但不能说明双手脱把为何也能稳定. 性能好的自行车即使不载人, 推出去也能走上一段路而不会马上倒下. 可见自行车具有自稳定的能力 (self-stability). 陀螺效应就是自稳定性的因素之一.

分析陀螺效应时可认为车体尚处于直立状态, 前叉也没有偏转, 即  $\theta = \psi = 0$ , 质心作直线运动. 当前轮随同车架以角速度  $\dot{\theta}$  开始向右侧倾斜时, 前轮上即有陀螺力矩  $M_{2y}$  产生<sup>[13]</sup>

$$M_{2y} = -\dot{\theta}i_2 \times L_2 = -J_{2z}\Omega_2\dot{\theta}j_2 \tag{8}$$

其中,  $L_2 = -J_{2z}\Omega_2k_2$  为前轮的动量矩,  $J_{2z}$  为前轮绕旋转轴的转动惯量,  $\Omega_2 = v/r$  为前轮的角速度,  $r$  为前轮半径. 力矩  $M_{2y}$  推动前叉和前轮绕  $O_2y_2$  轴转动, 设  $J_{2y}$  为前叉连同前轮对  $O_2y_2$  轴的转动惯量, 动力学方程为

$$\ddot{\psi} = \left( \frac{J_{2z}v}{J_{2y}r} \right) \dot{\theta} \tag{9}$$

即前叉和前轮产生与车架倾斜角速度  $\dot{\theta}$  成比例的角加速度  $\ddot{\psi}$ . 与骑车人主动控制规律 (6) 比较, 前叉的转动趋势完全一致, 但更为敏感. 当角加速度  $\ddot{\psi}$  随时间积累成角速度  $\dot{\psi}$  时, 利用  $\dot{\psi}(0) = \theta(0) = 0$  的初始条件, 式 (9) 可降阶为

$$\dot{\psi} = \left( \frac{J_{2z}v}{J_{2y}r} \right) \theta \tag{10}$$

角速度  $\dot{\psi}$  的出现引起次生的陀螺力矩  $M_{2x}$

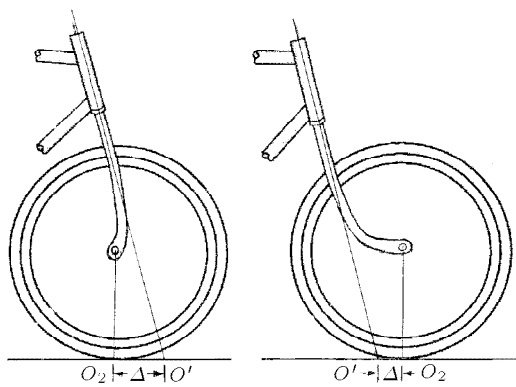
$$M_{2x} = -\dot{\psi}j_2 \times L_2 = -\lambda\dot{\theta}i_2 \tag{11}$$

其中,  $\lambda = J_{2z}^2v^2/J_{2y}r^2$ . 此力矩作用于前叉且通过轴套传至车架, 影响自行车整体绕  $O_1x_1$  轴的转动. 设  $J_x$  为车体对  $O_1x_1$  轴的转动惯量, 动力学方程为

$$J_x\ddot{\theta} + (\lambda - gh)\theta = 0 \tag{12}$$

只要  $\lambda > gh$  就能保证  $\theta$  的零解稳定. 于是车体在尚未转成曲线运动以前, 前轮的陀螺效应就已起稳定作用. 由于  $\lambda$  与速度平方成比例, 车速越快, 陀螺效应愈明显. 当角速度  $\dot{\psi}$  随时间积累成角度  $\psi$  时, 直线运动转变成曲线运动, 离心力效应才开始出现.

以上关于陀螺效应的理论分析并无漏洞, Jones 的无陀螺效应自行车的实验也不能完全否定陀螺效应的作用. 问题可能出在车轮的陀螺效应太微弱, 以致被其他更重要的自稳定因素所掩盖. 笔者在另文的算例中曾估计在受控情况下, 车轮的陀螺效应仅占稳定性因素的 3% 左右<sup>[14]</sup>. 为探寻影响自行车自稳定性的其他因素, Jones 研究了所谓“导向轴几何”(steering geometry). 也就是自行车前叉结构的几何参数对稳定性的影响, 体现在前叉转轴与地面交点  $O'$  与前轮与地面接触点  $O_2$  的相对关系上. 早在半个世纪以前, Grammel 就曾注意过此问题, 但仅限于理论分析<sup>[7,15]</sup>, 而 Jones 对此作了系统的实验研究. 实验结果证实,  $O'$  在  $O_2$  前方时(图 5(a)), 即使消除陀螺效应, 自行车也能自稳定. 而  $O'$  在  $O_2$  后方的自行车无论如何操纵都不能稳定(图 5(b)). 这种现象被称为“脚轮效应”(castor effect). 名词的由来是因为超市购物车的脚轮也能绕前方的垂直轴旋转, 一旦脚轮的滚动偏离购物车前进方向, 侧向摩擦力即推动脚轮转到与行走方向一致的位置(图 6).



(a)  $\Delta > 0$  稳定 (b)  $\Delta < 0$  不稳定  
图 5 自行车的脚轮效应

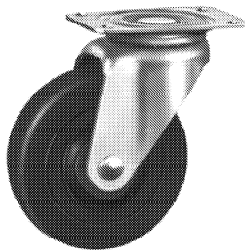


图 6 超市购物车的脚轮

自行车的前轮与超市购物车的脚轮非常相似. 当你手扶坐垫向前推车时, 前轮很容易顺从前进方向. 如向后倒退, 前轮就左右摇晃. 脚轮效应对自行车的作用还不仅于此. 为解释脚轮效应更重要的自稳定性作用, 设  $O'$  点在  $O_2$  点的前方与  $O_2$  点的距离为  $\Delta$ , 将前叉转轴  $O_2y_2$  从  $O_2$  平移至  $O'$ , 改以  $O'y'$  表示(图 7). 如前叉和前轮的质心  $O_{c2}$  在  $O'y'$  上, 质量为  $m_2 = (b/a)m$ . 当前叉和前轮随同车架倾斜  $\theta$  角时, 作用在  $O_2$  点沿垂直轴  $O_2y$  的法向支承力  $F_{2y} = m_2g$

产生绕前叉转轴  $O'y'$  的力矩

$$M_{2y} = -(mgb\Delta/a)\theta j_2 \quad (13)$$

此力矩推动前叉和前轮转动. 将上式代替式(8), 列写与式(9)类似的动力学方程, 导出

$$\ddot{\psi} = \mu\theta \quad (14)$$

与陀螺效应的控制规律(9)相仿, 也是促使导向轮朝正确方向转动. 区别仅在于与  $\ddot{\psi}$  成比例的倾斜角  $\theta$  代替了角速度  $\dot{\theta}$ . 式中  $\mu = mgb\Delta/J_{2y}a$  是表示脚轮效应强度的参数. 更准确的分析还必须考虑前叉绕  $O'y'$  轴的转动趋势引起  $O_2$  处的静摩擦力  $F_{2z}$ .  $F_{2z}$  与后轮的静摩擦力  $F_{1z}$  均平行于水平轴  $O_2z$ , 二者的合力与离心力  $mv^2/R$  平衡以实现曲线运动. 利用  $F_{2z}/F_{1z} = b/(a-b)$  导出  $F_{2z} = mv^2b/Ra$ . 利用式(1)消去  $R$ , 将  $F_{2z}$  对  $O'y'$  轴的力矩  $F_{2z}\Delta$  加入到前叉和前轮的力学方程(14), 得到

$$\ddot{\psi} + \mu\left(\frac{v^2\psi}{ga} - \theta\right) = 0 \quad (15)$$

上式与式(5)组成的方程组完全确定车架和前叉的运动规律. 利用常微分方程知识判断, 方程组(5),(15)并不满足零解的稳定性条件. Lowell 和 McKell 利用数值方法算出的特征根包括一个零根、一个负实根和一对含正实部的复根. 受扰运动规律为幅值逐渐增大的振荡曲线(图 8)<sup>[10]</sup>. 图中标号为(a),(b),(c)的 3 条曲线分别对应于  $\mu = 66.5, 133, 266$ , 说明自行车的自稳定能力随着脚轮效应的增大而加强. 不载人的空车推出后能稳定行走一段距离, 然后左右摇晃, 摆动

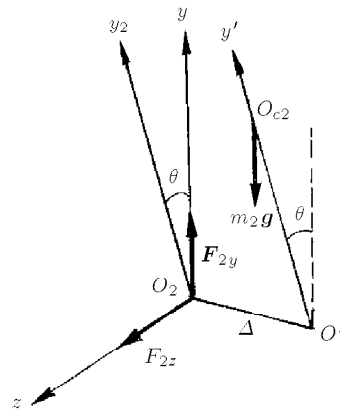


图 7 脚轮效应受力图

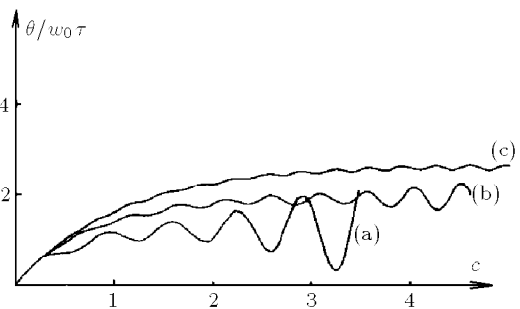


图 8 考虑脚轮效应的  $\theta(t)$  受扰运动(引自文献[10])

幅度愈来愈大最终翻倒的实际情况与上述脚轮效应的分析结果完全一致。

自行车的稳定性问题历经一百多年的分析和论证, 至今仍处于不停的探索过程。人类对真理的追求永无止境, 即使是对最普通最常见的自行车运动。

### 参 考 文 献

- 1 Conahan G. Top stories of 2011 #26: The new physics of bicycles. *Discover Magazine*, 2012
- 2 Carvallo E. Théorie du mouvement de monocycle et de la bicyclette. Paris: Gautier-Villars, 1899
- 3 Whipple FJW. The stability of the motion of a bicycle. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1899. 30: 312-348
- 4 Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle. Paris: Gautier-Villars, 1893-1896
- 5 Klein F, Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. Leipzig: Teubner, 1910
- 6 Timoshenko S, Young D H. Advanced Dynamics. New

- York: McGraw-Hill, 1948
- 7 Grammel R. Der Kreisel seine Theorie und Seine Anwendungen. Berlin: Springer, 1950
  - 8 Jones DEH. The stability of the bicycle. *Physics Today*, 1970, 23(4): 34-40
  - 9 Kirschner D. Some nonexplanation of bicycle stability. *Amer J Physics*, 1980, 48(1): 36-38
  - 10 Lowell J, McKell HD. The stability of bicycles. *Amer J Physics*, 1982, 50(12): 1106-1112
  - 11 Meijaard JP, Papadopoulos JM, Ruina A, et al. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. *Proc Royal Society*, 2007, A463 (2084)
  - 12 Kooijman JDG, Meijaard JP, Papadopoulos JM, et al. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. *Science*, 2011, 332(6027): 339-342
  - 13 刘延柱, 朱本华, 杨海兴. 理论力学 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2009
  - 14 刘延柱. 自行车的受控运动. *力学与实践*, 1995, 17 (4): 39-42
  - 15 刘延柱. 趣谈自行车运动. *力学与实践*, 2008, 30(3): 100-111

## 豆荚弹射传播种子中的力学 I: 豆荚组织的多功能优化

蒋持平<sup>1)</sup> 刘清漪 郭乾坤 严 鹏

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100191)

**摘要** 从豆荚弹射传播种子时形成美妙的自扭螺旋引出当代力学交叉领域的课题。介绍豆荚精巧的双层正交显微组织及其在保护籽粒、输导和储存营养物质、协同绿叶进行光合作用等方面的多功能优化。介绍籽粒成熟后, 豆荚两层组织自然枯萎失水, 在正交的方向不同步收缩积累变形能, 自发将成熟的籽粒弹射出去的精妙力学设计。第 2、3 和 4 部分将分别探讨豆荚的力学模型及其魔术般的变形性质、实验模拟以及科学启示。

**关键词** 豆荚组织, 弹射传播种子, 扭转螺旋, 多功能优化

### 1 从身边力学趣事到前沿课题

说到豆荚, 或许会使人想起一桩生活趣事: 金秋, 斑斓的丰收郊野, 醉人的穗实清香。忽然啪啪几声不大却悦耳的爆裂声打断了郊游遐想, 原来在阳光和清风抚摩下, 身旁未及时收割的成熟大豆地里 (图 1), 几个豆荚爆裂了, 将籽粒弹射出来。

自然地, 我们会想到植物传播种子的各种有趣方式: 有潇洒的风力传播, 像木蝴蝶、云杉、百合、郁金香的种子自带了薄片形状的“飞行器”遨游天下, 风滚草则乘风滚动洒



图 1 成熟的大豆

播种子; 有优雅的水力传播, 像松叶菊、马齿苋的果实在大雨中开裂让种子随水流旅行, 椰子壳则是天然游泳圈, 载种子飘过茫茫大海到孤岛上安家; 有死缠烂磨的搭载传播, 像苍耳、鬼针草等的种子外表具有倒钩、刺毛、黏液一类的粘附器, 依附动物的皮毛或禽鸟的羽毛奔向或飞向远方; 也有投桃报李的友情搭载传播, 像山葡萄、冬青、南天竹、铁冬青、榕树等的种子坚硬的表皮外有美味果肉, 鸟兽食后将种子排泄安置在遥远的原野山巅, 作为对馈赠美味的答谢, 还

本文于 2012-03-15 收到。

1) E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn