

平面杆件体系几何组成分析的运动学方法¹⁾

舒开鸥²⁾ 郭子涛 陈彬 张雷 樊耀星

(九江学院建筑工程与规划学院, 江西九江 332005)

摘要 平面杆件体系的几何组成分析是结构力学重要的基础内容, 教材介绍的两刚片规则、三刚片规则及零载法等分析方法在处理一些构造复杂的体系时, 往往无能为力。本文基于两个关于虚铰和无穷远虚铰的运动学特征定理, 建立了一种理论上能分析任意平面杆件体系几何组成的运动学方法, 并给出了三个应用实例。

关键词 几何组成, 复杂体系, 结构力学, 运动学

中图分类号: O342 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-20-511

KINEMATICS-BASED METHOD FOR GEOMETRIC COMPOSITION ANALYSIS OF PLANAR MEMBER SYSTEM¹⁾

SHU Kai'ou²⁾ GUO Zitao CHEN Bin ZHANG Lei FAN Yaoxing

(School of Construction Engineering and Urban Planning, Jiujiang University, Jiujiang 332005, Jiangxi, China)

Abstract The geometric composition analysis for the planar member system is a fundamental part in the structural mechanics. With the traditional triangular rules or the zero-load method, difficulties will be encountered in analyzing some complex systems. To overcome these shortcomings, a kinematics-based method is proposed to analyze any planar member systems theoretically. Three examples are provided to show its efficiency.

Key words geometric composition, complex system, structural mechanics, kinematics

平面体系的几何组成分析又叫机动性分析, 结构力学教材中只介绍了两刚片规则、三刚片规则和零载法等基本方法^[1], 这些方法虽然通俗易懂、方便应用, 但只能分析一些杆件不多、构造简单的体系。近年来, 有关学者、教师提出了一些新的分析平面体系几何组成的方法^[2-5], 这些方法中, 有些方法仍然只能分析简单体系, 有些方法则太过深奥、繁琐, 不适合本科和专科学生学习和应用。本文尝试运用理论力学^[6]中运动学的知识分析平面体系的几何组成, 试图找到一种既能分析复杂体系又易学习掌握的方法。

1 虚铰和无穷远虚铰的运动学特征定理

1.1 定理一: 两刚片 (或其扩展部分) 在虚铰处速度相等

如图 1, 刚片 I 和刚片 II 由两根链杆 AC 和 BD 连接, 由于两链杆不平行, 故可看成刚片 I 和刚片 II 由在两链杆交点 O 点处的虚铰连接。设刚片 I 和刚片 II 在 O 点 (两刚片上或刚片的扩展部分上与虚铰位置重合的点) 的速度矢量分别为 v_{O1} 和 v_{O2} , 则有 $v_{O1} = v_{O2}$ 。该定理的证明过程见文献 [7]。

2020-12-15 收到第 1 稿, 2021-01-21 收到修改稿。

1) 九江学院教改课题 (XJJGYB-19-32) 和江西省教育厅教改课题 (JXJG-20-17-2) 资助项目。

2) 舒开鸥, 主要研究方向为固体力学和基础力学教学。E-mail: sko01011@163.com

引用格式: 舒开鸥, 郭子涛, 陈彬等. 平面杆件体系几何组成分析的运动学方法. 力学与实践, 2021, 43(3): 435-438

Shu Kai'ou, Guo Zitao, Chen Bin, et al. Kinematics-based method for geometric composition analysis of planar member system. *Mechanics in Engineering*, 2021, 43(3): 435-438

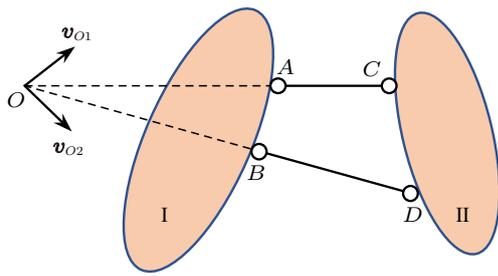


图1 虚铰的运动学特征

1.2 定理二: 无穷远虚铰 (两根平行链杆) 连接的两刚片, 角速度相等

如图2, 刚片 I 和刚片 II 由 AC 和 BD 两根平行链杆 (无穷远虚铰) 连接, 设刚片 I 和刚片 II 的角速度矢量分别为 ω_1 和 ω_2 , 则有 $\omega_1 = \omega_2$ 。该定理的证明过程见文献 [7]。

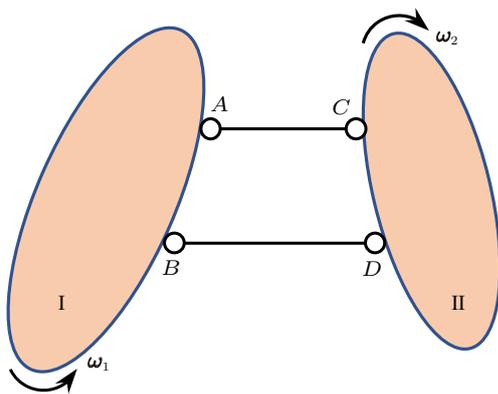


图2 无穷远虚铰的运动学特征

2 运动学方法分析平面杆件体系几何组成的思路

杆件体系的几何组成分析, 又叫机动性分析, 本质是考察体系中各刚片之间或者各结点之间有无相对运动的可能, 因此可考虑利用运动学的相关理论以及虚铰和无穷远虚铰的运动学特征定理, 建立一种杆件体系几何组成分析的新方法。

(1) 假设体系可变, 并按可能运动的方式, 给定体系初始运动参数, 如某一个或几个结点 (或具有不动点的刚片) 的速度 v (或角速度 ω)。

(2) 利用运动学理论 (如基点法、速度瞬心法、速度投影定理等) 及本文的两个定理求出其余结点 (或刚片) 的速度 v_i (或角速度 ω_i)。

(3) 分析 v (或 ω) 是否有非零解, 若有非零解则体系几何可变, 反之则体系几何不变。

(4) 若体系几何不变, 求出计算自由度 W , 即可确定体系多余约束的个数。

3 应用举例

例 1 分析图 3 体系的几何组成。

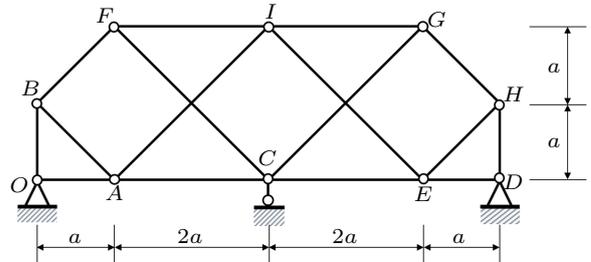


图3 例1的简图

解: (1) O 和 D 点不动, 在 OCD 上利用速度投影定理可知 C 点也不动, 设刚片 OAB 绕 O 点转动的角速度为 ω , 则 A 点及该刚片扩展部分上 M 点的速度均为 ωa , 见图 4。

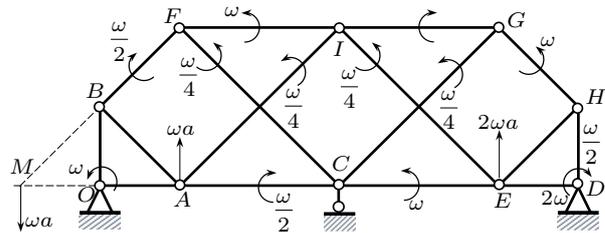


图4 运动学方法分析例1体系的几何组成

(2) M 点是连接刚片 OAB 与杆 CF 的虚铰所在位置, 由定理一可得杆 CF 扩展部分上与 M 点重合的点速度也为 ωa , 于是杆 CF 角速度为

$$\omega_{CF} = \frac{\omega a}{4a} = \frac{\omega}{4}$$

由于平行链杆连接, 由定理二可知杆 AI , EI , CG 与杆 CF 角速度相等, 均为 $\omega/4$ 。同理, 杆 CE , FI , GH 与刚片 OAB 角速度相等都为 ω , 可得 E 点速度为 $2\omega a$, 于是刚片 DEH 的角速度为

$$\omega_{DEH} = \frac{2\omega a}{a} = 2\omega \tag{1}$$

(3) 由 A 点速度可得杆 AC 角速度为 $\omega/2$, 由定理二可知杆 AC , BF , GI 与刚片 DEH 角速度相等, 即

$$\omega_{DEH} = \omega_{BF} = \omega_{GI} = \omega_{AC} = \frac{\omega a}{2a} = \frac{\omega}{2} \tag{2}$$

比较式 (1) 和式 (2), 得 $\omega = 0$, 可知连接于 O, C 和 D 点 (已知的不动点) 的所有刚片和杆不能动, 在此基础上易知其余杆都不动, 即体系为几何不变体系。体系的计算自由度 $W = -1$, 有一个多余约束。

例 2 分析图 5 体系的几何组成。

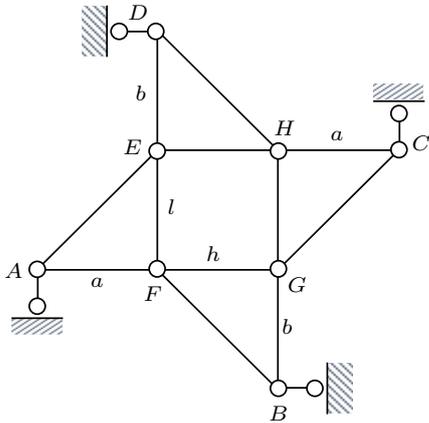


图 5 例 2 的简图

解: (1) 点 A, B, C 和 D 可分别沿垂直各点支座的方向运动, 故刚片 AEF, BFG, CHG 和 DEH 的速度瞬心分别在直线 AA', BB', CC' 和 DD' 上, 见图 6, 设结点 A 速度为 v , 在 AFG 上利用速度投影定理, 可得刚片 BFG 角速度。

$$v_{Fx} = v_{Gx} = v \Rightarrow \omega_{BFG} = \frac{v_{Fx}}{b} = \frac{v}{b} \quad (3)$$

(2) 由定理二可知刚片 BFG 和 DEH 角速度相同, 于是可得

$$v_{Ex} = v_{Hx} = v_C = \frac{v}{b} \cdot b = v \quad (4)$$

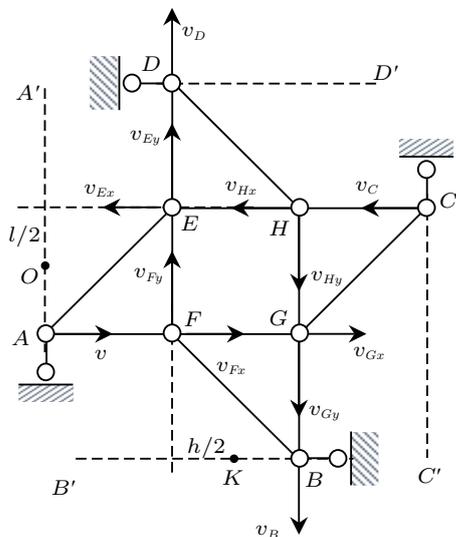


图 6 运动学方法分析例 2 体系的几何组成

根据式 (4) 及 A 点速度, 可确定刚片 AEF 速度瞬心 O 的位置及其角速度, 进而可求得点 F, E, D 沿竖向的速度

$$\omega_{AEF} = \frac{v_{Ex}}{0.5l} = \frac{2v}{l} \Rightarrow v_{Fy} = v_{Ey} = v_D = \frac{2va}{l}$$

(3) 同理可得

$$v_{Hy} = v_{Gy} = v_B = \frac{2va}{l}$$

根据 v_B 及 v_{Fy} 可确定刚片 BFG 速度瞬心 K 的位置及其角速度

$$\omega_{BFG} = \frac{v_B}{0.5h} = \frac{4va}{hl} \quad (5)$$

比较式 (3) 和式 (5), 得

$$\omega_{BFG} = \frac{v}{b} = \frac{4va}{hl} \Rightarrow v = 0 \text{ 或 } hl = 4ab$$

当 $hl = 4ab$ 时, v 可不为 0, 即各结点能动, 体系几何可变且绝对自由度 $S = 1$, 体系计算自由度 $W = 0$, 故有一个多余约束。当 $hl \neq 4ab$ 时, v 必为 0, 即各结点不动, 体系几何不变且无多余约束。

例 3 分析图 7 体系的几何组成。

解: (1) OA 杆和 EF 杆分别可能绕点 O 和 F 转动, 可设结点 A 和 E 的速度分别为 v 和 v' , 并设 EF 杆角速度为 ω , 见图 8, 由于 D, E 和 F 三点共线且 F 点固定, 故 D 点速度 v_D 只能垂直于 DEF , 在 ED 上以 E 点为基点, 由基点法可得

$$v_D = v' + \omega d$$

(2) 分别在 AC 和 CD 上利用速度投影定理, 可得 C 点速度 v_C 分别沿 AC 和 CD 方向的投影 v_{CA} 和 v_{CD}

$$v_{CA} = v \sin \alpha, \quad v_{CD} = v_D \sin \gamma = (v' + \omega d) \sin \gamma$$

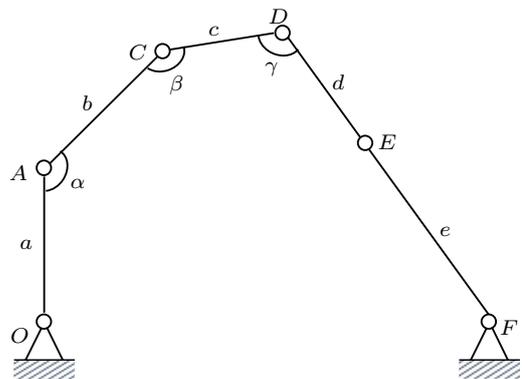


图 7 例 3 的简图

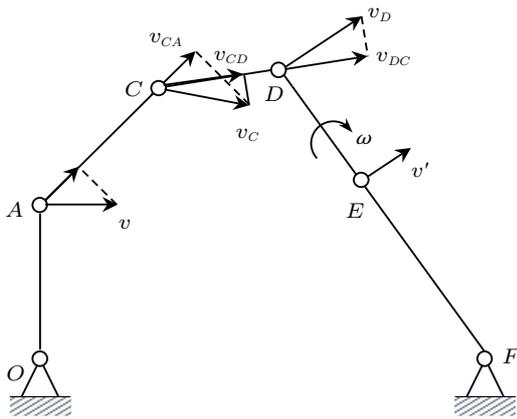


图8 运动学方法分析例3体系的几何组成

进而可得

$$v_C = [v^2 \sin^2 \alpha + (v' + \omega d)^2 \sin^2 \gamma + 2v(v' + \omega d) \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta]^{1/2} \sin \beta$$

(3) 各结点速度均已求出, 由于 v, v' 和 ω 均可取任意值, 故体系为可变体系, 且绝对自由度 $S = 3$, 计算自由度 $W = 3$, 因此无多余约束。

4 需要说明的问题

(1) 对于可变体系, 运动学方法不能进一步分析是几何常变还是几何瞬变, 实际上大多数时候也不用分析, 故统称几何可变^[1]。

(2) 对于可变体系, 可根据其独立运动参数的个数, 确定其绝对自由度 S , 再结合计算自由度 W , 可进一步确定其多余约束的个数为: $S - W$ 。如例2中, 当 $hl = 4ab$ 时, v 可不为0, 是可变体系, 体系只有一个运动参数 v , 因此 $S = 1$, 结合体系 $W = 0$, 故多余约束有 $S - W = 1$ 个。又如例3中, 因为有3个独立运动参数 v, v' 和 ω , 故 $S = 3$, 又因为 $W = 3$, 所以多余约束有 $S - W = 0$ 个。

(3) 对于不变体系, 只需一个初始运动参数 v 或 ω 即可求出全部 v_i 或 ω_i ; 但对于可变体系, 往往则需多个初始运动参数才能求出全部 v_i 或 ω_i 。由于事先并不确定是哪种体系, 因此应根据可能的运动方式, 适当多设几个初始运动参数。如例1中, 可设结点 A 和 E 的速度分别为 v 和 v' , 见图9, 则有

$$\omega_{OAB} = \frac{v}{a}, \quad \omega_{AC} = \frac{v}{2a}, \quad \omega_{CE} = \frac{v'}{2a}, \quad \omega_{DEH} = \frac{v'}{a}$$

由于平行链杆连接, 由定理二

$$\omega_{OAB} = \omega_{FI} = \omega_{CE} \Rightarrow v' = 2v$$

$$\omega_{AC} = \omega_{GI} = \omega_{DEH} \Rightarrow v = 2v'$$

比较两式, 有: $v = v' = 0$, 即结点 A 和点 E 的速度均为0, 不难得出其他结点速度也均为0。

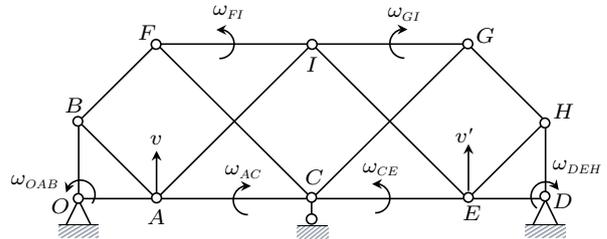


图9 多初始运动参数分析例1

5 结束语

理论力学是结构力学的先学课程, 利用已掌握的理论力学中的运动学理论分析平面杆件体系的几何组成, 不仅能帮助学生更好理解这一内容, 还能解决很多利用两刚片规则、三刚片规则等基本方法不能解决的问题, 可作为今后结构力学教学及工程实践的有益补充。

参 考 文 献

- 李廉锟. 结构力学, 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2010
- 吴耀鹏, 吴耀欢. 平面体系几何组成分析的解析法研究. 力学与实践, 2012, 34(6): 62-64
Wu Yaopeng, Wu Yaohuan. Study on analytical method of geometric composition analysis for planar system. *Mechanics in Engineering*, 2012, 34(6): 62-64 (in Chinese)
- 孙丽莹. 平面体系几何组成分析广义三角形规则新思路. 力学与实践, 2013, 35(6): 84-87
- 贾培强, 陈贵清. “虚链杆”在组成分析上的应用. 力学与实践, 2002, 24(4): 66-67
Jia Peiqiang, Chen Guiqing. “Virtual bar” used in composition analysis. *Mechanics in Engineering*, 2002, 24(4): 66-67 (in Chinese)
- 韩明岚, 陈建林, 高倩. 结合刚体基本运动分析三刚片体系几何构造. 力学与实践, 2016, 38(4): 456-459
Han Minglan, Chen Jianlin, Gao Qian. Analysis of geometric structure of three-rigid-plate system based on basic motion of rigid body. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(4): 456-459 (in Chinese)
- 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学 (I), 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2009
- 刘亚菲, 舒开鸥, 郭子涛等. 一种“有无穷远虚铰的三刚片规则”的证明方法. 力学与实践, 2020, 42(6): 802-805
Liu Yafei, Shu Kai'ou, Guo Zitao, et al. A proving method of three-rigid panels rule with infinite virtual hinge. *Mechanics in Engineering*, 2020, 42(6): 802-805 (in Chinese)

(责任编辑: 王永会)