

考虑温度效应的覆冰导线动力学 建模及舞动特征研究¹⁾

闵光云* 刘小会*,†,2) 蔡萌琦**,†† 孙测世*,† 杨曙光* 张春霞*

* (重庆交通大学土木工程学院, 重庆 400074)

† (重庆交通大学省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 重庆 400074)

** (成都大学建筑与土木工程学院, 成都 610106)

†† (成都大学模式识别与智能信息处理四川省高校重点实验室, 成都 610106)

摘要 针对以往研究忽略了温度效应对覆冰导线舞动特性的影响, 本文推导了考虑温度效应影响的覆冰导线舞动控制方程。基于悬链法、热应力理论推导了覆冰导线的偏微分舞动方程, 接着通过 Galerkin 法将该偏微分方程转化为常微分方程。建立气动载荷模型, 将气动力引入到舞动方程中, 随后采用多尺度求得了覆冰导线的位移响应, 最后进行了参数分析、算例分析。结果表明: 温度对覆冰导线面内、面外的频率影响显著, 且对覆冰导线舞动的幅值也有一定的影响。可见针对覆冰导线舞动特征的影响研究, 有必要考虑温度效应的影响, 本文的研究成果有利于理论建模的完善, 也能给予实际工程一定的参考。

关键词 温度效应, 覆冰导线, 舞动特征, 频率, 幅值

中图分类号: O322, TM753 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-20-319

DYNAMIC MODELING AND GALLOPING CHARACTERISTICS OF ICED CONDUCTOR WITH CONSIDERATION OF TEMPERATURE EFFECT¹⁾

MIN Guangyun* LIU Xiaohui*,†,2) CAI Mengqi**,†† SUN Ceshi*,† YANG Shuguang* ZHANG Chunxia*

* (School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

† (State Key Laboratory of Bridge and Tunnel Engineering in Mountain Areas, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

** (School of Architecture and Civil Engineering, Chengdu University, Chengdu 610106, China)

†† (Key Laboratory of Pattern Recognition and Intelligent Information Processing, Institutions of Higher Education of Sichuan Province, Chengdu University, Chengdu 610106, China)

Abstract The influence of the temperature on the galloping characteristics of iced conductor was often neglected in related studies. In this paper, the galloping governing equation with consideration of the temperature effect is derived. Based on the catenary method and the thermal stress theory, the partial differential galloping equation of iced conductor is derived, then the partial differential equation is transformed into the ordinary differential equation by Galerkin method. The aerodynamic load model is established and the aerodynamic loads are introduced into the galloping equation. Then the displacement response of the iced conductor is obtained by the multiple scale method. Finally, a parameter analysis and a numerical example analysis are carried out. The results show that the temperature has a significant effect on the in-plane and out-of-plane frequencies of

2020-08-05 收到第 1 稿, 2020-08-26 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金 (51308570, 51808085, 51507106), 重庆市研究生科研创新项目 (X202010618001, CYS19240), 重庆市科委基础科学与前沿技术研究 (cstc2017jcyjAX0246), 重庆市教委科学技术研究项目 (KJ201600712182) 资助。

2) 刘小会, 副教授, 研究方向为输电线结构动力学分析。E-mail: cqdxlxh@126.com

引用格式: 闵光云, 刘小会, 蔡萌琦等. 考虑温度效应的覆冰导线动力学建模及舞动特征研究. 力学与实践, 2021, 43(1): 84-93

Min Guangyun, Liu Xiaohui, Cai Mengqi, et al. Dynamic modeling and galloping characteristics of iced conductor with consideration of temperature effect. *Mechanics in Engineering*, 2021, 43(1): 84-93

the iced conductor, and also has a certain influence on the galloping amplitude of the iced conductor. It can be seen that the influence of the temperature on the galloping characteristics of the iced conductors must be considered when studying the galloping characteristics of the iced conductor.

Key words temperature effect, iced conductor, galloping characteristics, frequency, amplitude

覆冰导线舞动是引起线路发生破坏的主要原因之一, 因此研究覆冰导线舞动这一课题引起了学术界的关注^[1]。覆冰导线舞动本质属于自激振动, 通常表现为低频、大振幅的几何非线性特征^[2-3]。在冬季季风的作用下, 覆冰导线舞动可持续数十日, 长时间舞动所产生的交变应力会导致线路破坏、螺栓松动等事故^[4-7], 严重危害着国民经济和人民安全。针对覆冰导线舞动的研究, 科技学者们在这一领域做了许多贡献^[1-14]。Den Hartog^[8]与 Nigol 等^[9]提出了各自的舞动机理, 在学术界受到了广泛的认可。秦力等^[11]推导了二分裂覆冰导线舞动所产生的交变张力的表达式, 并分析半波数等参数对交变张力的影响, 得出覆冰二分裂导线的动态响应特性, 最后结合 ANSYS 有限元软件对理论结果进行了验证。向玲等^[12]通过 FLUENT 仿真软件模拟了覆冰四分裂导线的气动力系数, 并将该气动力系数与风洞试验所得气动力系数进行对比, 发现其结果比较吻合, 接着将模拟所得的气动力系数施加到有限元模型上, 系统地研究了覆冰四分裂导线的舞动特征。周林抒等^[13]采用 ABAQUS 有限元软件对覆冰六分裂导线的舞动进行了数值模拟, 得到了覆冰六分裂导线的位移响应、舞动轨迹、交变张力, 并将数值模拟结果与现场实测结果作对比, 验证了数值模拟结果的准确性。蔡萌琦等^[14]在文献 [13] 的基础上进一步研究了覆冰八分裂导线的舞动特征, 还讨论了风速、档距等参数对覆冰八分裂导线舞动特征的影响。

在研究覆冰导线舞动时, 大部分学者都忽略了温度效应对覆冰导线舞动特征的影响, 而实际工程中, 温度变化会导致覆冰导线膨胀或收缩, 在覆冰导线内部产生热应力, 进而可能对覆冰导线的舞动特征造成一定的影响。因此, 本文在研究覆冰导线舞动特征时, 重点考虑了温度效应对覆冰导线舞动特征的影响, 研究成果将对理论建模的完善与实际工程的指导有一定的参考价值。

1 舞动方程

建立如图 1 所示的覆冰导线数学模型, 覆冰导

线两端铰接, 且以左铰接点为笛卡尔坐标系的原点, 两铰接点的连线为 x 轴, y 轴正方向与重力加速度方向一致, z 轴正方向垂直于平面指向内。图 1 中的 Γ_1 表示覆冰导线的静态构型, Γ_2 表示覆冰导线的热应力平衡构型, Γ_3 表示覆冰导线的动态构型。

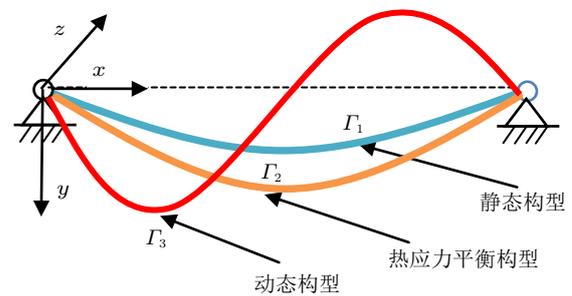


图 1 覆冰导线数学模型

将覆冰导线当作连续体, 根据牛顿力法可得覆冰导线静态构型上的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(H \frac{\partial x}{\partial s} \right) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(H \frac{\partial y}{\partial s} \right) = -mg \quad (1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(H \frac{\partial z}{\partial s} \right) = 0 \quad (1c)$$

式中, s 为弧坐标, m 为覆冰导线的单位质量, g 为重力加速度, H 为初始张力。

同理, 可得到覆冰导线在热应力平衡构型上的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H}) \left(\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H}) \left(\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] = -mg \quad (2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H}) \left(\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] = 0 \quad (2c)$$

式中, u, v, w 分别表示温度变化引起的覆冰导线 x 轴、 y 轴、 z 轴方向位移的变化量; \check{H} 表示温度变化引起的张力变化量。

同理, 也可得到覆冰导线在动态构型上的平衡

方程为

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H} + \bar{H}) \left(\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right) \right] = m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + c_U \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H} + \bar{H}) \left(\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right) \right] = -mg + m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + c_V \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - F_V \quad (3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H} + \bar{H}) \left(\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right) \right] = m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + c_W \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - F_W \quad (3c)$$

式中, F_V 和 F_W 分别表示 y 轴、 z 轴方向覆冰导线所受气动载荷; c_U, c_V, c_W 分别表示覆冰导线 x 轴、 y 轴、 z 轴方向的阻尼系数; $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 分别表示在气动载荷作用下覆冰导线 x 轴、 y 轴、 z 轴方向增加的位移; \bar{H} 为气动载荷作用下覆冰导线张力的变化量。

覆冰导线 x 轴方向的振动波速远小于 y 轴、 z 轴方向的振动波速, 因此忽略 x 轴方向的位移 \bar{u} , 然后根据式 (1)~式 (3) 可得覆冰导线 y 轴、 z 轴方向的舞动控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \bar{H} \left(\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right) \right] = m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + c_V \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - F_V \quad (4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(H + \check{H}) \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \bar{H} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right] = m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + c_W \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - F_W \quad (4b)$$

式中

$$y = \frac{mg}{2H}(L-x)x, \quad v = -\frac{\check{H}}{H+\check{H}}y$$

$\check{H} = \alpha \Delta T EA$ (α 为热膨胀系数, ΔT 为温度变化量, EA 为覆冰导线的拉伸刚度)。

覆冰导线在气动载荷作用下张力的表达式为

$$\bar{H} = \frac{EA}{L} \int_0^L \left[\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right)^2 \right] ds \quad (5)$$

式中, L 表示覆冰导线的跨径。

覆冰导线在气动载荷下的位移为

$$\bar{v} = \phi_2(x)q_2(t) \quad (6a)$$

$$\bar{w} = \phi_3(x)q_3(t) \quad (6b)$$

式中, ϕ_2 和 ϕ_3 表示模态函数, q_2 和 q_3 表示振动函数。

将式 (5) 和式 (6) 代入式 (4), 并根据 Galerkin 方法可得覆冰导线的舞动常微分方程

$$\vartheta_1 q_2 + \vartheta_2 q_2^2 + \vartheta_3 q_3^2 + \vartheta_4 q_2^3 + \vartheta_5 q_2 q_3^2 + \vartheta_6 \ddot{q}_2 + \vartheta_7 \dot{q}_2 + \vartheta_8 = 0 \quad (7a)$$

$$\nu_1 q_3 + \nu_2 q_2 q_3 + \nu_3 q_2^2 q_3 + \nu_4 q_3^3 + \nu_5 \ddot{q}_3 + \nu_6 \dot{q}_3 + \nu_7 = 0 \quad (7b)$$

式 (7) 中的线性与非线性系数的表达式分别为

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \int_0^L (H + \check{H}) \phi_2'' \phi_2 dx + \int_0^L \frac{EA}{L} \left(1 - \frac{\check{H}}{H + \check{H}} \right) y'' \int_0^L y' \phi_2' dx \phi_2 dx \\ \vartheta_2 &= \int_0^L \frac{EA}{2L} \left(1 - \frac{\check{H}}{H + \check{H}} \right) y'' \int_0^L \phi_2'^2 dx \phi_2 dx + \int_0^L \frac{EA}{L} \phi_2'' \int_0^L y' \phi_2' dx \phi_2 dx \\ \vartheta_3 &= \int_0^L \frac{EA}{2L} \left(1 - \frac{\check{H}}{H + \check{H}} \right) y'' \int_0^L \phi_3'^2 dx \phi_2 dx \\ \vartheta_4 &= \int_0^L \frac{EA}{2L} \phi_2'' \int_0^L \phi_2'^2 dx \phi_2 dx \\ \vartheta_5 &= \int_0^L \frac{EA}{2L} \phi_2'' \int_0^L \phi_3'^2 dx \phi_2 dx \\ \vartheta_6 &= - \int_0^L m \phi_2^2 dx, \quad \vartheta_7 = - \int_0^L c_V \phi_2^2 dx \\ \vartheta_8 &= \int_0^L F_V \phi_2 dx, \quad \nu_1 = \int_0^L (H + \check{H}) \phi_3'' \phi_3 dx \\ \nu_2 &= \int_0^L \frac{EA}{L} \phi_3'' \int_0^L y' \phi_2' dx \phi_3 dx \\ \nu_3 &= \int_0^L \frac{EA}{2L} \phi_3'' \int_0^L \phi_2'^2 dx \phi_3 dx \\ \nu_4 &= \int_0^L \frac{EA}{2L} \phi_3'' \int_0^L \phi_3'^2 dx \phi_3 dx \\ \nu_5 &= - \int_0^L m \phi_3^2 dx, \quad \nu_6 = - \int_0^L c_W \phi_3^2 dx \\ \nu_7 &= \int_0^L F_W \phi_3 dx \end{aligned}$$

2 气动载荷分析

冬季来临时, 在季风的影响下导线表面容易结冰, 由于覆冰的影响, 导线表面会受到一定大小的气

动载荷, 为分析气动载荷对覆冰导线的作用形式, 首先需建立覆冰导线横截面模型, 如图 2 所示。

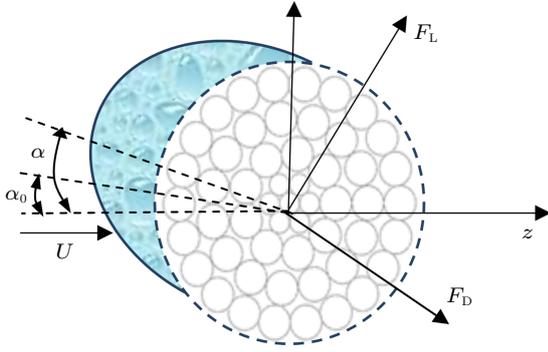


图 2 覆冰导线横截面

F_L 表示气动升力, F_D 表示气动阻力, α 表示攻角, α_0 表示初始攻角, U 表示风速 (方向平行于 z 轴)。可得到

$$F_V = F_L \cos(\alpha_t) - F_D \sin(\alpha_t) = \frac{1}{2} \rho D U^2 C_y(\alpha) \quad (8a)$$

$$F_W = F_L \sin(\alpha_t) + F_D \cos(\alpha_t) = \frac{1}{2} \rho D U^2 C_z(\alpha) \quad (8b)$$

式中, $\alpha = \alpha_0 - \alpha_t$, $\alpha_t = \dot{v}/U$; ρ 表示空气密度; D 表示迎风直径; C_y 和 C_z 分别表示 y 轴、 z 轴方向的气动力系数, 其表达式为

$$C_y = \alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha^2 + \alpha_3 \alpha^3 \quad (9a)$$

$$C_z = \beta_1 \alpha + \beta_2 \alpha^2 + \beta_3 \alpha^3 \quad (9b)$$

式中, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为待定系数, 可通过风洞试验测得。

初始攻角为一定常数, 只具备静力效应, 不影响覆冰导线的舞动特征, 因此忽略初始攻角, 然后将式 (9) 代入式 (8) 可得

$$F_V = \frac{1}{2} \rho D U^2 \left[\alpha_1 \left(-\frac{\dot{v}}{U} \right) + \alpha_2 \left(-\frac{\dot{v}}{U} \right)^2 + \alpha_3 \left(-\frac{\dot{v}}{U} \right)^3 \right] \quad (10a)$$

$$F_W = \frac{1}{2} \rho D U^2 \left[\beta_1 \left(-\frac{\dot{v}}{U} \right) + \beta_2 \left(-\frac{\dot{v}}{U} \right)^2 + \beta_3 \left(-\frac{\dot{v}}{U} \right)^3 \right] \quad (10b)$$

根据 Galerkin 方法, 上节内容已经得到

$$\vartheta_8 = \int_0^L F_V \phi_2 dx \quad (11a)$$

$$\nu_7 = \int_0^L F_W \phi_3 dx \quad (11b)$$

将式 (11) 代入式 (10), 并将所得结果代入式 (7) 可得到新的覆冰导线舞动常微分方程

$$\vartheta_1 q_2 + \vartheta_2 q_2^2 + \vartheta_3 q_3^2 + \vartheta_4 q_2^3 + \vartheta_5 q_2 q_3^2 + \vartheta_6 \ddot{q}_2 + \vartheta_7 \dot{q}_2 + \vartheta_9 \dot{q}_2 + \vartheta_{10} \dot{q}_2^2 + \vartheta_{11} \dot{q}_2^3 = 0 \quad (12a)$$

$$\nu_1 q_3 + \nu_2 q_2 q_3 + \nu_3 q_2^2 q_3 + \nu_4 q_3^3 + \nu_5 \ddot{q}_3 + \nu_6 \dot{q}_3 + \nu_8 \dot{q}_2 + \nu_9 \dot{q}_2^2 + \nu_{10} \dot{q}_2^3 = 0 \quad (12b)$$

式 (12) 新增加的线性与非线性系数的表达式分别为

$$\vartheta_9 = \int_0^L \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(-\frac{\alpha_1}{U} \right) \phi_2^2 dx$$

$$\vartheta_{10} = \int_0^L \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(\frac{\alpha_2}{U^2} \right) \phi_2^3 dx$$

$$\vartheta_{11} = \int_0^L \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(-\frac{\alpha_3}{U^3} \right) \phi_2^4 dx$$

$$\nu_8 = \int_0^L \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(-\frac{\beta_1}{U} \right) \phi_2 \phi_3 dx$$

$$\nu_9 = \int_0^L \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(\frac{\beta_2}{U^2} \right) \phi_3 \phi_2^2 dx$$

$$\nu_{10} = \int_0^L \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(-\frac{\beta_3}{U^3} \right) \phi_3 \phi_2^3 dx$$

3 多尺度法分析

覆冰导线的舞动一般属于弱非线性系统的振动问题。针对弱非线性系统振动的研究, 常用的定量分析方法有摄动法、KBM 渐进法、谐波平衡法以及多尺度法等。多尺度法^[15-19] 因逻辑清晰、计算结果精度高而受到科技学者们的青睐。

为满足多尺度法的求解格式, 首先转化式 (12) 为

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon (\gamma_1 \dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_2^2 + \gamma_3 \dot{q}_2^3 + \gamma_4 \dot{q}_2^2 + \gamma_5 \dot{q}_3^2 + \gamma_6 \dot{q}_3^3 + \gamma_7 q_2 q_3^2) \quad (13a)$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \varepsilon (\eta_1 \dot{q}_3 + \eta_2 \dot{q}_2 + \eta_3 \dot{q}_2^2 + \eta_4 \dot{q}_2^3 + \eta_5 q_2 q_3 + \eta_6 q_2^2 q_3 + \eta_7 q_3^3) \quad (13b)$$

式中, ε 表示无量纲的小参数, 涉及到的其他线性与非线性系数的表达式分别为

$$\gamma_1 = -\frac{\vartheta_7 + \vartheta_9}{\vartheta_6}, \quad \gamma_2 = -\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_6}, \quad \gamma_3 = -\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_6}, \quad \gamma_4 = -\frac{\vartheta_2}{\vartheta_6}$$

$$\gamma_5 = -\frac{\vartheta_3}{\vartheta_6}, \quad \gamma_6 = -\frac{\vartheta_4}{\vartheta_6}, \quad \gamma_7 = -\frac{\vartheta_5}{\vartheta_6}, \quad \omega_2^2 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_6}$$

$$\omega_3^2 = \frac{\nu_1}{\nu_5}, \quad \eta_1 = -\frac{\nu_6}{\nu_5}, \quad \eta_2 = -\frac{\nu_8}{\nu_5}, \quad \eta_3 = -\frac{\nu_9}{\nu_5}$$

$$\eta_4 = -\frac{\nu_{10}}{\nu_5}, \quad \eta_5 = -\frac{\nu_2}{\nu_5}, \quad \eta_6 = -\frac{\nu_3}{\nu_5}, \quad \eta_7 = -\frac{\nu_4}{\nu_5}$$

式(13)的解为

$$q_2 = q_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon q_{21}(T_0, T_1) + \dots \quad (14a)$$

$$q_3 = q_{30}(T_0, T_1) + \varepsilon q_{31}(T_0, T_1) + \dots \quad (14b)$$

式中, q_{20} 和 q_{30} 表示覆冰导线的周期解, q_{21} 和 q_{31} 表示覆冰导线的修正解, T_0 和 T_1 为时间尺度(物理意义分别表示关于时间 t 的快变化量与慢变化量), 且满足

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dT_0} \frac{T_0}{dt} + \frac{d}{dT_1} \frac{T_1}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (15a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{d}{dT_0} \frac{T_0}{dt} + \frac{d}{dT_1} \frac{T_1}{dt} \right)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (15b)$$

式中, D_0 和 D_1 为标记符号。

将式(14)和式(15)代入式(13), 并将涉及到小参数 ε 的项分类整理可得:

ε 的零次项

$$D_0^2 q_{20} + \omega_2^2 q_{20} = 0 \quad (16a)$$

$$D_0^2 q_{30} + \omega_3^2 q_{30} = 0 \quad (16b)$$

ε 的一次项

$$D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = -2D_0 D_1 q_{20} + \gamma_1 D_0 q_{20} + \gamma_2 (D_0 q_{20})^2 + \gamma_3 (D_0 q_{20})^3 + \gamma_4 q_{20}^2 + \gamma_5 q_{30}^2 + \gamma_6 q_{20}^3 + \gamma_7 q_{20} q_{30}^2 \quad (17a)$$

$$D_0^2 q_{31} + \omega_3^2 q_{31} = -2D_0 D_1 q_{30} + \eta_1 D_0 q_{30} + \eta_2 D_0 q_{20} + \eta_3 (D_0 q_{20})^2 + \eta_4 (D_0 q_{20})^3 + \eta_5 q_{20} q_{30} + \eta_6 q_{20}^2 q_{30} + \eta_7 q_{30}^3 \quad (17b)$$

将式(16)的解设为

$$q_{20} = A_V(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + cc \quad (18a)$$

$$q_{30} = A_W(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) + cc \quad (18b)$$

式中, A_V 和 A_W 表示覆冰导线的舞动幅值(皆为 T_1 的函数), cc 表示复杂的共轭项, i 为虚数单位。

将式(18)代入式(17)可得

$$D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = (-2i\omega_2 A'_V + \gamma_1 i\omega_2 A_V +$$

$$3\gamma_3 i\omega_2^3 A_V^2 \bar{A}_V + 3\gamma_6 A_V^2 \bar{A}_V + 2\gamma_7 A_V A_W \bar{A}_W) \cdot \exp(i\omega_2 T_0) + \gamma_2 (-\omega_2^2 A_V^2 + \gamma_4 A_V^2) \cdot \exp(2i\omega_2 T_0) + (\gamma_6 A_V^3 - \gamma_3 i\omega_2^3 A_V^3) \cdot \exp(3i\omega_2 T_0) + \gamma_2 \omega_2^2 A_V \bar{A}_V + \gamma_4 A_V \bar{A}_V + \gamma_5 [A_W^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_W \bar{A}_W] + \gamma_7 \{A_V A_W^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_3)T_0] + \bar{A}_V A_W^2 \exp[i(-\omega_2 + 2\omega_3)T_0]\} + cc \quad (19a)$$

$$D_0^2 q_{31} + \omega_3^2 q_{31} = (-2i\omega_3 A'_W + \eta_1 i\omega_3 A_W + 2\eta_6 \bar{A}_V A_V A_W + 3\eta_7 A_W^2 \bar{A}_W) \exp(i\omega_3 T_0) + \eta_2 i\omega_2 A_V \exp(i\omega_2 T_0) + \eta_3 [-\omega_2^2 A_V^2 \cdot \exp(2i\omega_2 T_0) + \omega_2^2 A_V \bar{A}_V] + \eta_4 [-i\omega_2^3 A_V^3 \cdot \exp(3i\omega_2 T_0) + 3i\omega_2^3 A_V^2 \bar{A}_V \exp(i\omega_2 T_0)] + \eta_5 \{A_V A_W \exp[i(\omega_2 + \omega_3)T_0] + A_V \bar{A}_W \exp[i(\omega_2 - \omega_3)T_0]\} + \eta_6 \{A_V^2 A_W \exp[i(2\omega_2 + \omega_3)T_0] + A_V^2 \bar{A}_W \exp[i(2\omega_2 - \omega_3)T_0]\} + \eta_7 A_W^3 \exp(3i\omega_3 T_0) + cc \quad (19b)$$

根据微分方程的可解条件, 式(19)有解的充要条件为其久期项需为零, 即

$$-2i\omega_2 A'_V + \gamma_1 i\omega_2 A_V + 3\gamma_3 i\omega_2^3 A_V^2 \bar{A}_V + 3\gamma_6 A_V^2 \bar{A}_V + 2\gamma_7 A_V A_W \bar{A}_W = 0 \quad (20a)$$

$$-2i\omega_3 A'_W + \eta_1 i\omega_3 A_W + 2\eta_6 \bar{A}_V A_V A_W + 3\eta_7 A_W^2 \bar{A}_W = 0 \quad (20b)$$

将 A_V 和 A_W 改写为极坐标形式, 即

$$A_V = \frac{1}{2} \xi_V \exp(i\mu_V) \quad (21a)$$

$$A_W = \frac{1}{2} \xi_W \exp(i\mu_W) \quad (21b)$$

式中, ξ_V 和 ξ_W 表示振幅, μ_V 和 μ_W 表示相位。

将式(21)代入式(20)并分离实部和虚部可得

$$\xi'_V = \frac{\gamma_1}{2} \xi_V + \frac{3\gamma_7 \omega_2^2}{8} \xi_V^2 \quad (22a)$$

$$\mu'_V = -\frac{3\gamma_6}{8\omega_2} \xi_V^2 - \frac{\gamma_7}{4\omega_2} \xi_V^2 \quad (22b)$$

$$\xi'_W = \frac{\eta_1}{2} \xi_W \quad (22c)$$

$$\mu'_W = -\frac{\eta_6}{4\omega_3} \xi_W^2 - \frac{3\eta_7}{8\omega_3} \xi_W^2 \quad (22d)$$

式 (22) 可根据 Newton-Raphson 方法求解, 当给定覆冰导线的物理参数与气动力系数时, 就能得到覆冰导线的位移时程曲线。

4 算例分析

本文的研究会涉及到覆冰导线的物理参数, 具体为: 覆冰导线的拉伸刚度 $EA = 13.3 \times 10^6$ N, 初始张力 $H = 21.73 \times 10^3$ N, 单位质量 $m = 1.53$ kg/m, 平均风速 $U = 4.1$ m/s, 覆冰导线的直径 $D = 0.0188$ m, 空气密度 $\rho = 1.2929$ kg/m³, y 轴的黏性阻尼系数 $c_V = 0.01$, z 轴的黏性阻尼系数 $c_W = 0.379$, 热膨胀系数 $\alpha = 1.68 \times 10^{-5}$ °C⁻¹, 气动力系数 $\alpha_1 = -0.667$, $\alpha_2 = -16.2188$, $\alpha_3 = 33.4324$, $\beta_1 = 3.442$, $\beta_2 = 3.33$, $\beta_3 = 7.1262$, 静态初始构型 $y = (mgx/2H) \times (L - x)$, 模态函数 $\phi_2 = \sin(\pi x/L)$, $\phi_3 = \sin(\pi x/L)$ 。

本文推导了覆冰导线面内、面外固有频率的计算式, 从计算式中得知温度的变化会导致覆冰导线固有频率的变化, 为系统地分析不同档距下覆冰导线固有频率随温度变化的趋势, 现给出了覆冰导线档距 L 分别为 80 m, 150 m, 300 m, 500 m 下温度对面内、面外固有频率的影响曲线, 见图 3。

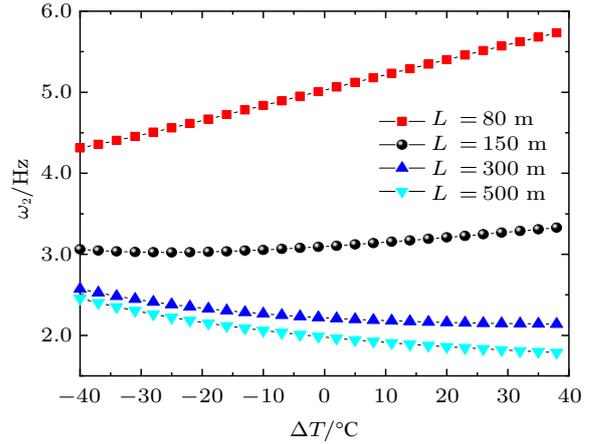
从图 3 可知: 覆冰导线档距 L 为 80 m 和 150 m 时, 随着温度的升高, 覆冰导线的面内、面外的频率都将增加; 覆冰导线档距 L 为 300 m 和 500 m 时, 随着温度的升高, 覆冰导线的面内的频率将下降、面外的频率将增加。这是因为面内频率的表达式为 $\omega_2^2 = \vartheta_1/\vartheta_6$, 即影响面内频率的系数主要为 ϑ_1 和 ϑ_6 。其中 $\vartheta_6 = -\int_0^L m\phi_2^2 dx$, 且 ϑ_6 随着档距的增加而增加, ϑ_1 表达式为

$$\vartheta_1 = \int_0^L (H + \check{H})\phi_2''\phi_2 dx + \int_0^L \frac{EA}{L} \left(1 - \frac{\check{H}}{H + \check{H}}\right) y'' \int_0^L y'\phi_2' dx \phi_2 dx$$

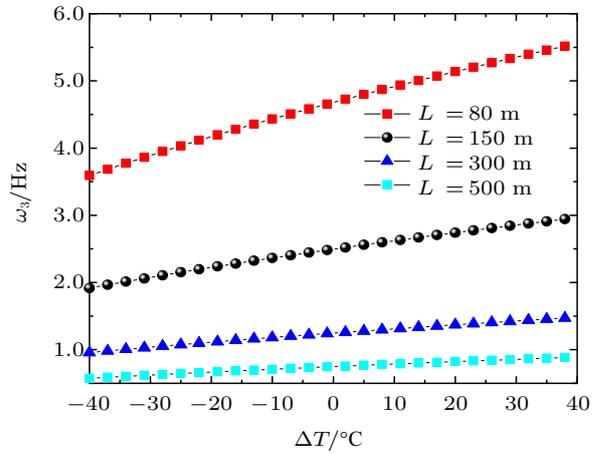
但 ϑ_1 的变化与档距和温度都有关。档距较小时, ϑ_1 的大小主要由 $\int_0^L (H + \check{H})\phi_2''\phi_2 dx$ 决定, 即随着温度增高、档距变大, ϑ_1 的值会增加; 档距较大时, 影响系数 ϑ_1 的多项式

$$\int_0^L \frac{EA}{L} \left(1 - \frac{\check{H}}{H + \check{H}}\right) y'' \int_0^L y'\phi_2' dx \phi_2 dx$$

的值会变大, 且该值为负数, 进而会使得 ϑ_1 的值变小。面外频率的表达式为 $\omega_3^2 = \nu_1/\nu_5$, 即影响面内频



(a) 温度对面内频率的影响



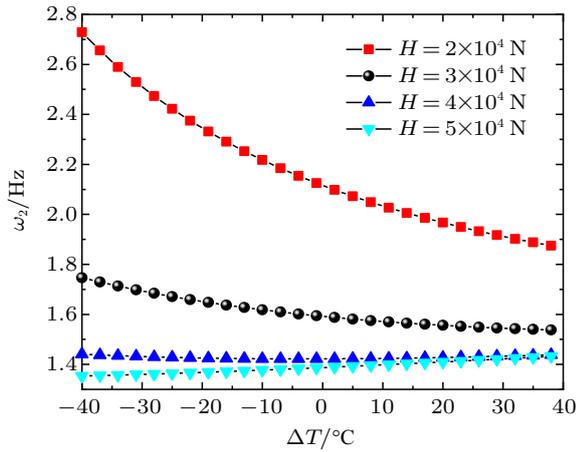
(b) 温度对面外频率的影响

图 3 温度对固有频率的影响 (不同档距)

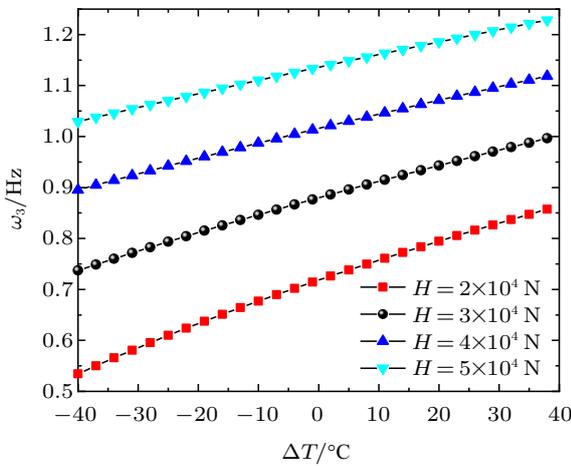
率的系数主要为 ν_1 和 ν_5 , 且都随着档距和温度的增加而增加, 但 ν_5 的增加速度比 ν_1 的增加速度快, 即在大档距下面外频率的斜率较小。由此可知不同档距下, 温度对覆冰导线面内、面外的频率的影响是很显著的。

覆冰导线的初始张力 H 一般在 3.0×10^4 N 上下浮动, 为分析不同张力下覆冰导线固有频率随温度变化的趋势, 现给出了覆冰导线张力 H 分别为 2.0×10^4 N, 3.0×10^4 N, 4.0×10^4 N, 5.0×10^4 N 下温度对面内、面外固有频率的影响曲线, 见图 4。

从图 4 可知: 覆冰导线初始张力 H 为 2.0×10^4 N 和 3.0×10^4 N 时, 随着温度的升高, 覆冰导线的面内的频率将下降、面外的频率将增加; 覆冰导线初始张力 H 为 4.0×10^4 N 和 5.0×10^4 N 时, 随着温度的升高, 覆冰导线的面内、面外的频率都将增加。这是因为面内的频率为 $\omega_2^2 = \vartheta_1/\vartheta_6$, 当张力较小时, 影响系数 ϑ_1 的多项式



(a) 温度对面内频率的影响



(b) 温度对外面频率的影响

图4 温度对固有频率的影响(不同张力)

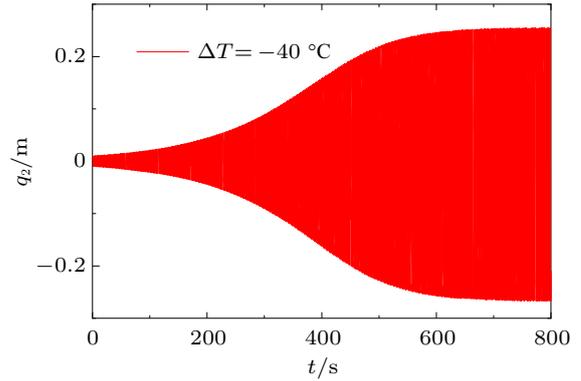
$$\int_0^L \frac{EA}{L} \left(1 - \frac{\ddot{H}}{H + \ddot{H}}\right) y'' \int_0^L y' \phi_2' dx \phi_2 dx$$

的值会随着温度的升高而变大,且该值为负数,因此会使得面内的频率变小;当张力较大时,多项式

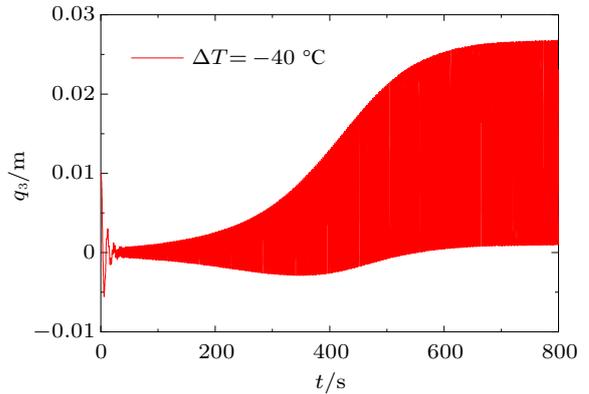
$$\int_0^L \frac{EA}{L} \left(1 - \frac{\ddot{H}}{H + \ddot{H}}\right) y'' \int_0^L y' \phi_2' dx \phi_2 dx$$

的值对频率的影响将越来越小,因此当初始张力 H 为 4.0×10^4 N 和 5.0×10^4 N 时,面内的频率表现为缓慢增加的趋势。由此可知不同张力下,温度对覆冰导线面内、面外的频率的影响也是很显著的。

根据上述分析得知:温度变化会导致覆冰导线面内、面外频率的改变,进而可能导致舞动幅值发生改变。实际生活中 500 m 的大跨越覆冰导线随处可见,因此下面给出档距 L 为 500 m 的覆冰导线在 $\Delta T = -40^\circ\text{C}$, $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ 时的位移时程曲线,见图 5~图 7。



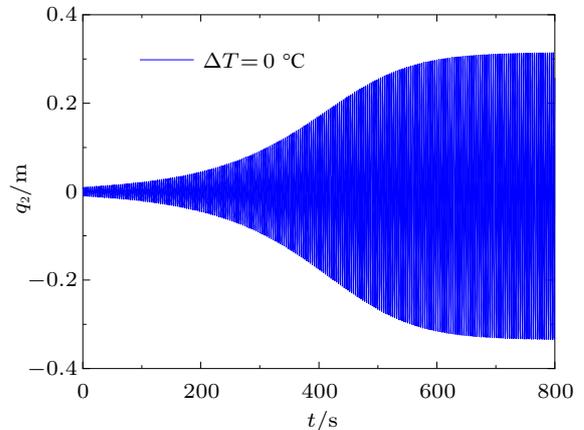
(a) 面内位移响应曲线



(b) 面外的位移响应曲线

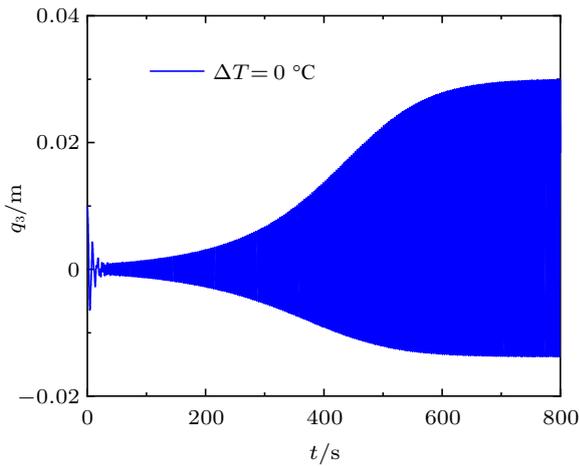
图5 位移响应曲线 ($T = -40^\circ\text{C}$)

从图 5~图 7 可知:覆冰导线的舞动是一个能量逐渐积累的过程。在 600 s 之前,随着时间的推移,面内、面外的幅值逐渐增加,当达到 600 s 左右时,导线逐渐趋于稳定,稳定后幅值保持不变;温度对幅值的影响比较显著。当温度降低时,导线稳定后的幅值会降低,当温度升高时,导线稳定后的幅值会增加,因此针对覆冰导线舞动特征研究时,有必要考虑温度效应对覆冰导线舞动特征的影响。



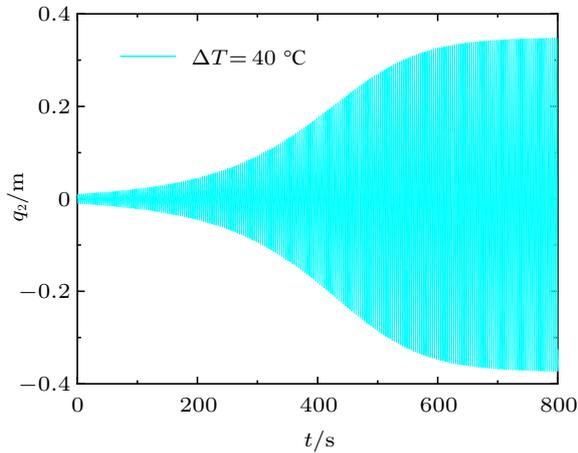
(a) 面内位移响应曲线

图6 位移响应曲线 ($T = 0^\circ\text{C}$)

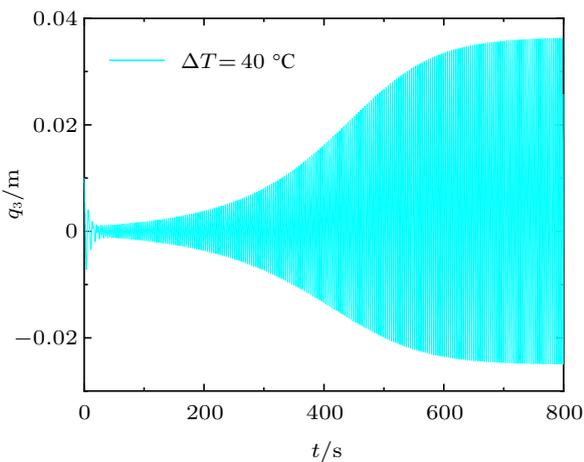


(b) 面外的位移响应曲线

图 6 位移响应曲线 ($T = 0^{\circ}\text{C}$) (续)



(a) 面内位移响应曲线

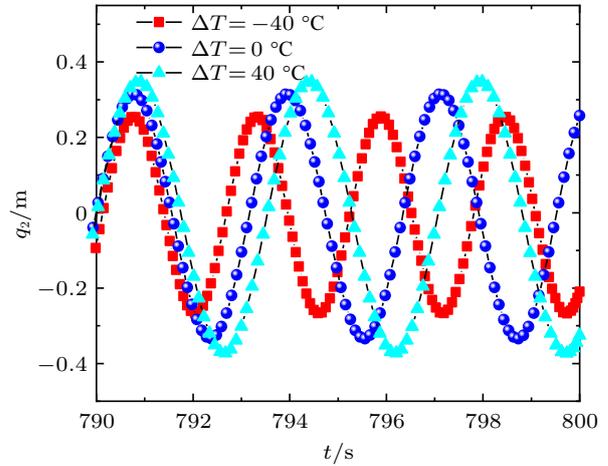


(b) 面外的位移响应曲线

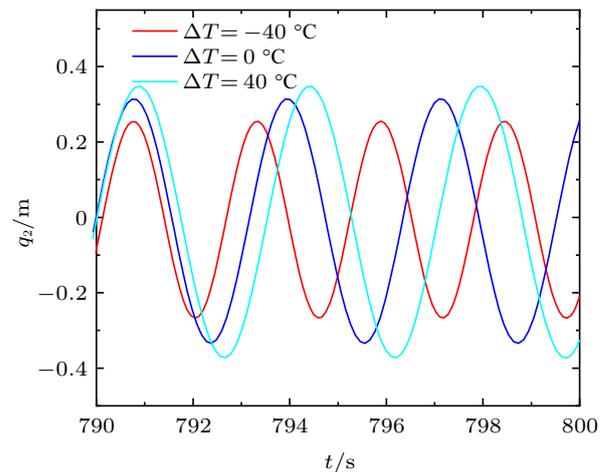
图 7 位移响应曲线 ($T = 40^{\circ}\text{C}$)

根据上述分析可知，温度变化会对覆冰导线的舞动幅值造成影响，为了更加清楚地对比不同温度

变化下覆冰导线舞动幅值的区别，图 8~图 10 给出了处于稳定状态下 10 s 内的幅值对比分析图，还给出了数值解用来验证本文结果的有效性、适用性。

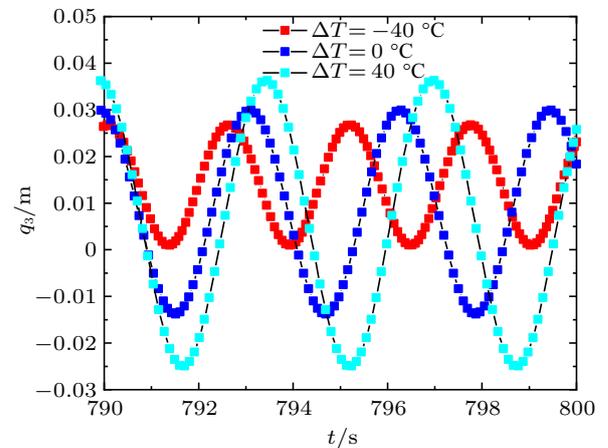


(a) 多尺度法解



(b) 数值解

图 8 面内的位移响应曲线 (不同温度下)



(a) 多尺度法解

图 9 面外的位移响应曲线 (不同温度下)

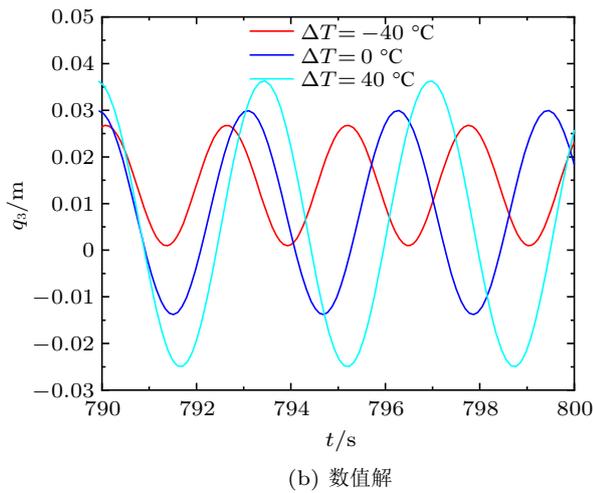


图9 面外的位移响应曲线(不同温度下)(续)

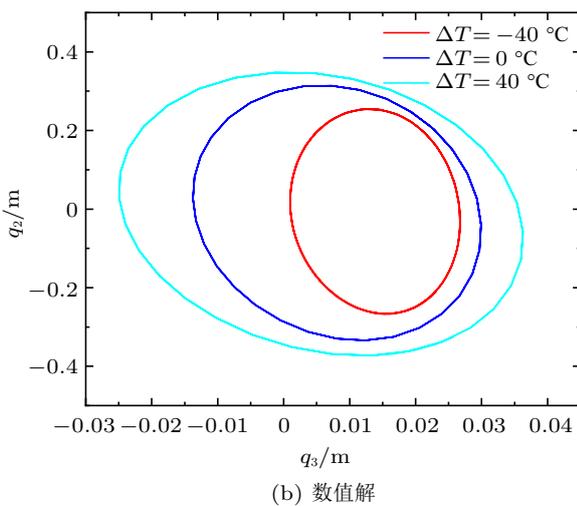
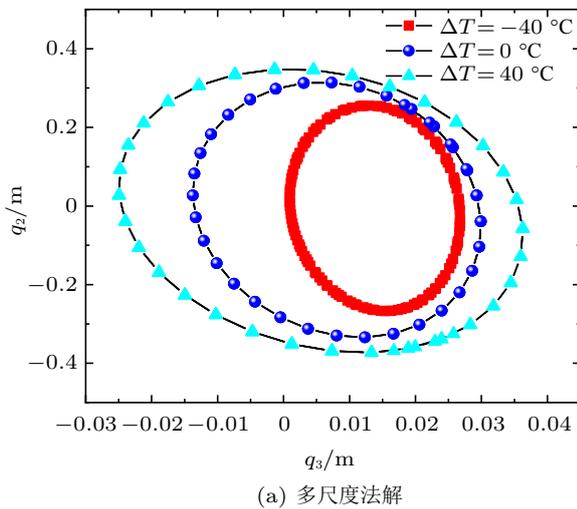


图10 轨迹曲线(不同温度下)

从图8~图10可知:当覆冰导线稳定时,导线面内、面外的幅值都将保持不变,稳定时点的轨迹近

似为椭圆,稳定后舞动的周期保持不变;且随着温度的升高,覆冰导线面内、面外的幅值明显增加,随着温度的降低,覆冰导线面内、面外的幅值明显降低,因此考虑温度变化对导线舞动特征的影响是必要的;多尺度法所得解与数值法所得解比较吻合,验证了本文结果的有效性。

5 结论

本文推导了考虑温度效应的覆冰导线舞动方程,随后采用多尺度法求得了覆冰导线的位移响应表达式,最后进行了参数分析、算例分析,且通过数值法对所得结果进行了验证,所得结论如下:

(1) 覆冰导线档距 L 为 80 m 和 150 m 时,随着温度的升高,覆冰导线的面内、面外的频率都将增加;覆冰导线档距 L 为 300 m 和 500 m 时,随着温度的升高,覆冰导线的面内的频率将下降、面外的频率将增加。因此,不同档距下,温度对覆冰导线面内、面外的频率的影响是很显著的。

(2) 覆冰导线张力 H 为 2.0×10^4 N 和 3.0×10^4 N 时,随着温度的升高,覆冰导线的面内的频率将下降、面外的频率将增加;覆冰导线张力 H 为 4.0×10^4 N 和 5.0×10^4 N 时,随着温度的升高,覆冰导线的面内、面外的频率都将增加。因此,不同张力下,温度对覆冰导线面内、面外的频率的影响是很显著的。

(3) 覆冰导线的舞动是一个能量积累的过程,随着温度的升高,覆冰导线面内、面外的幅值明显增加,随着温度的降低,覆冰导线面内、面外的幅值明显降低。针对覆冰导线舞动特性分析时,考虑温度变化对导线舞动特征的影响是必要的。

参 考 文 献

- 1 杨志安, 刘鹏飞, 席晓燕. 温度场中输电线在谐波扰力作用下的 1/3 次亚谐波共振研究. 工程力学, 2007, 24(8): 190-195
Yang Zhi'an, Liu Pengfei, Xi Xiaoyan. 1/3 subharmonic resonance of suspended cable subjected to harmonic excitation in temperature field. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(8): 190-195 (in Chinese)
- 2 郭应龙, 李国兴, 尤传永. 输电线路舞动. 北京: 中国电力出版社, 2003
Guo Yinglong, Li Guoxing, You Chuanyong. *The Galloping of Transmission Line*. Beijing: China Electric Power Press, 2003 (in Chinese)

- 3 刘小会, 闵光云, 严波等. 不同自由度下覆冰四分裂导线舞动特征分析. *力学季刊*, 2020, 41(2): 370-383
Liu Xiaohui, Min Guangyun, Yan Bo, et al. Analysis of galloping characteristics of iced quad bundle conductor with different degrees of freedom. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2020, 41(2): 370-383 (in Chinese)
- 4 楼文娟, 林巍, 黄铭枫等. 不同厚度新月形覆冰对导线气动力特性的影响. *空气动力学学报*, 2013, 31(5): 616-622
Lou Wenjuan, Lin Wei, Huang Mingfeng, et al. The impact of iced thickness on aerodynamic characteristics of crescent shape iced conductors. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2013, 31(5): 616-622 (in Chinese)
- 5 Zhou A, Liu X, Zhang S, et al. Wind tunnel test of the influence of an interphase spacer on the galloping control of iced eight-bundled conductors. *Cold Regions Science and Technology*, 2018, 155: 354-366
- 6 刘小会, 韩勇, 陈世民等. 连续档覆冰导线舞动数值模拟及参数分析. *力学与实践*, 2014, 36(1): 37-41
Liu Xiaohui, Han Yong, Chen Shimin, et al. Numerical simulation and parameter analysis of galloping of iced continuous spans. *Mechanics in Engineering*, 2014, 36(1): 37-41 (in Chinese)
- 7 马文勇, 顾明, 全涌等. 准椭圆形覆冰导线气动力特性试验研究. *同济大学学报 (自然科学版)*, 2010, 38(10): 1409-1413
Ma Wenyong, Gu Ming, Quan Yong, et al. Testing study on aerodynamic force characteristics of quasi-oval shape iced conductor. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2010, 38(10): 1409-1413 (in Chinese)
- 8 Den Hartog JP. Transmission line vibration due to sleet. *AIEE Transaction*, 1932, 4: 1074-1086
- 9 Nigol O, Buchan PG. Conductor galloping—part II torsional mechanism. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1981, 100(2): 708-720
- 10 Ferretti M, Zulli D, Luongo A. A continuum approach to the nonlinear in-plane galloping of shallow flexible cables. *Advances in Mathematical Physics*, 2019, 2019: 1-12
- 11 秦力, 曹桢恺, 丁婧楠. 双分裂覆冰导线舞动的动态张力变化特征. *水电能源科学*, 2017, 35(11): 190-193
Qin Li, Cao Ankai, Ding Jingnan. Dynamic tension change characteristics of double-bundle iced conductor galloping. *Water Resources and Power*, 2017, 35(11): 190-193 (in Chinese)
- 12 向玲, 张悦, 唐亮. 覆冰四分裂导线的气动特性和舞动特性分析. *中国工程机械学报*, 2019, 17(4): 297-303
Xiang Ling, Zhang Yue, Tang Liang. Analysis for aerodynamic characteristics and galloping behaviors of quad bundle conductor. *Chinese Journal of Construction Machinery*, 2019, 17(4): 297-303 (in Chinese)
- 13 周林抒, 严波, 杨晓辉等. 真型试验线路六分裂导线舞动模拟. *振动与冲击*, 2014, 33(9): 6-11
Zhou Linshu, Yan Bo, Yang Xiaohui, et al. Galloping simulation of six-bundle conductors in a transmission test line. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(9): 6-11 (in Chinese)
- 14 蔡萌琦, 徐倩, 周林抒等. 扇形覆冰特高压八分裂导线舞动特性分析. *力学与实践*, 2018, 40(6): 630-638
Cai Mengqi, Xu Qian, Zhou Linshu, et al. Galloping behaviors of sector-shape iced eight bundle conductors. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(6): 630-638 (in Chinese)
- 15 Luongo A, Zulli D, Piccardo G. Analytical and numerical approaches to nonlinear galloping of internally resonant suspended cables. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 315(3): 375-393
- 16 Zhao Y, Peng J, Zhao Y, et al. Effects of temperature variations on nonlinear planar free and forced oscillations at primary resonances of suspended cables. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(4): 2815-2827
- 17 黄坤, 温建明, 冯奇. 悬索承重梁索耦合结构的垂向运动动力学模型及主共振分析. *工程力学*, 2013, 30(2): 182-189
Huang Kun, Wen Jianming, Feng Qi. Dynamic model and principal resonance of a coupled structure by suspended cable and stayed beam. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(2): 182-189 (in Chinese)
- 18 蔡萍, 唐驾时. 强非线性振动系统极限环振幅控制研究. *振动与冲击*, 2013, 32(9): 110-112
Cai Ping, Tang Jiashi. Amplitude control of limit cycles in a class of strongly nonlinear oscillation systems. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(9): 110-112 (in Chinese)
- 19 Sun C, Zhao Y, Peng J, et al. Multiple internal resonances and modal interaction processes of a cable-stayed bridge physical model subjected to an invariant single-excitation. *Engineering Structures*, 2018, 172: 938-955

(责任编辑: 王永会)