

再谈从矩阵位移法看有限元位移精度的损失与恢复¹⁾

袁 驷²⁾ 袁 全

(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘要 本文是文献 [1] 的续篇。文献 [1] 以一维有限元为例, 揭示了其误差主要来自于各个单元的“固端解”。其后, 基于这一思想的超收敛计算的单元能量投影 (element energy projection, EEP) 法得以创立和发展, 并有效地用于自适应有限元求解。近期的反思发现, 前文的思想精华还有发扬空间: 既然单元“固端解”是有限元误差的主要来源, 就可以用 EEP 公式简便地事先求出来, 从而可以不经有限元计算而一举得到所需的网格划分。本文简要介绍这一最新方法的思路和机理, 并给出初步的数值结果。

关键词 矩阵位移法, 一维有限元法, 固端解, 先验定量估计, 自适应网格划分

中图分类号: O302 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-20-106

REVISITING THE LOSS AND RECOVERY OF DISPLACEMENT ACCURACY IN FEM AS SEEN FROM MATRIX DISPLACEMENT METHOD¹⁾

YUAN Si²⁾ YUAN Quan

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract This paper is a revisit of Ref.[1], where it is shown that the errors from one-dimensional finite element (FE) results mostly come from the element fixed-end solutions. Based on this concept, the element energy projection (EEP) method for the super-convergence calculation is developed. Moreover, when the EEP technique is applied to the adaptive FE analysis to estimate and control the errors in FE solutions, the solutions satisfying the user pre-set error tolerances in the maximum norm can be obtained. Recent introspection leads to a realization that the essence in Ref.[1] has not been fully exploited: since the element fixed-end solutions are the major source of errors, then it is possible to calculate the errors a priori by using the EEP method, immediately generating a desirable mesh without the need for the FE analysis in advance. This paper gives a brief introduction to this novel idea and some initial numerical results are given to show the validity and effectiveness of the proposed technique.

Key words matrix displacement method, finite element method, fixed-end solutions, a prior error estimate, mesh adaptivity

本文于 2020-03-18 收到。

1) 国家自然科学基金资助项目 (51878383, 51378293)。

2) 袁驷, 教授, 主要研究方向为结构工程。E-mail: yuans@tsinghua.edu.cn

引用格式: 袁驷, 袁全. 再谈从矩阵位移法看有限元位移精度的损失与恢复. 力学与实践, 2020, 42(6): 689-694

Yuan Si, Yuan Quan. Revisiting the loss and recovery of displacement accuracy in FEM as seen from matrix displacement method. *Mechanics in Engineering*, 2020, 42(6): 689-694

文献[1]通过比较杆件结构的矩阵位移法^[2]和有限元法^[3-4],得出一个结论:即有限元的误差主要来自于其丢失的单元“固端解”项。其后,基于恢复单元固端解这一思想,超收敛计算的单元能量投影(element energy projection, EEP)法得以创立并取得长足发展,不仅对一维有限元法^[5-8],对二维有限元线法^[9]、二维乃至三维有限元法^[10-12]都建立了 EEP 超收敛算法,也得到了数学理论上的证明^[12-13]。更有意义的是,采用 EEP 超收敛解替代精确解来估计常规有限元解的误差,使得基于 EEP 技术的自适应有限元求解得以实现,其最突出的特点是可以得到按最大模逐点满足用户给定的误差限的解答,可谓是数值精确解^[14-15]。目前,这种自适应有限元方法不仅有效地应用于各种线性问题,也在特征值问题和多种非线性问题中得到了广泛而有效的应用^[16-18],而近期发展的网格局部加密技术为一类刁难奇异问题的自适应求解提供了更高性能的求解方案^[19-20]。

纵观各类自适应求解,几乎都有一个共同点:因为解答事先未知,只能用后验误差方法,按照有限元求解、误差估计、更新网格三步循环迭代求解。这里的关键问题是:缺少先验定量的误差估计。这是因为,目前几乎所有的先验误差估计,都包含了事先不可计算的因素在其中,难以定量,只能是定性的。

本文作者经过对文献[1]的反思和进一步研究,发现其中的思想精华可得到更大的发扬,使得对常见的结构分析问题,有可能实现先验的定量的误差估计,从而可以不经有限元计算,便可以一举给出满足精度要求的网格划分。

本文对这一最新进展做一简要介绍,并给出初步的数值结果。作为初始探索,本文限于一维正定自伴问题的 Ritz 有限元法,也仅限于无内部结点的低次多项式单元。

1 方法思路

有限元的误差主要来自于其丢失的单元“固端解”项。这一结论是否准确?

下面分两种情况回答。

(1) 精确单元:其形函数是齐次控制微分方程的通解,结点位移是精确的,故该结论千真万确,固端解就是精确单元内部的误差。常截面杆件矩阵位移法的单元即是精确单元,参见文献[1]中的图1:其

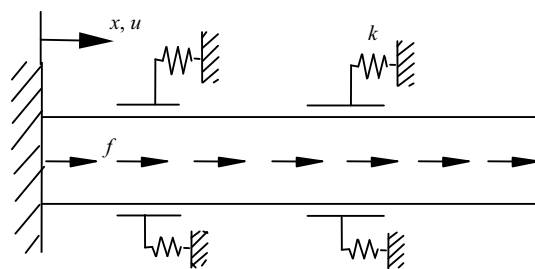


图1 二阶问题物理模型

状态(II)为有限元解,而状态(I)为固端解,亦是有限元解的误差。

(2) 近似单元:其形函数不是齐次控制微分方程的通解,结点位移是近似的,单元内部误差由固端解和非固端的有限元解共同组成。但是,有限元的数学理论已有证明,有限元的结点位移相比于单元内部位移是超收敛的,而且具有最佳超收敛性^[4];以 C^0 类单元为例(文献[1]的表2), m 次单元在单元内部为 $O(h^{m+1})$ 阶收敛,而在结点是 $O(h^{2m})$ 阶收敛的。所以,对于近似单元,特别是高次单元,相对于单元内部位移的误差,结点位移的误差是高阶微量,可以合理地将其略去,即近似单元误差的主要来源亦为固端解。

这样,精确单元和近似单元的误差的主要来源便得到了统一,即单元的固端解项。然而,求固端解是局部单元的问题,并不需要作整体的有限元求解。这就使得不经有限元求解而预先对有限元解的误差做出定量估计成为可能,此即为本文之核心要义所在。为方便,本文将所提出的方法简称为“固端法”,以下对其做进一步的介绍。

2 模型问题和有限元解

矩阵位移法的单元涉及轴向(拉压)和横向(弯曲)变形的两种类型单元;虽然在单元上相互没有耦合,但在整体结构上有相互作用。本文仍然采用文献[1]中的两个常微分方程问题作为本文的模型问题:

(1) 二阶常微分方程(轴向变形问题,图1)

$$\left. \begin{aligned} Lu \equiv -u'' + ku &= f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, \quad u'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(2) 四阶常微分方程(弯曲变形问题,图2)

$$\left. \begin{aligned} Lw \equiv w'''' + kw &= q, \quad 0 < x < 1 \\ w(0) = w'(0) &= 0, \quad w(1) = w''(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, L 代表微分算子, u 和 w 代表位移和挠度, k 为弹性地基的刚度, f 和 q 为均布载荷, 均设为非负的常数。

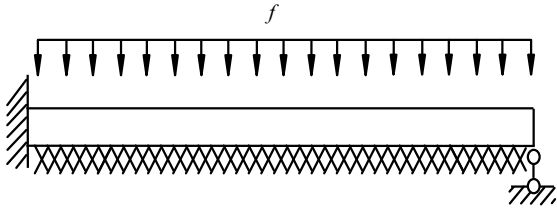


图 2 四阶问题物理模型

用有限元求解时, 和矩阵位移法一致, 轴向问题 (1) 采用线性单元, 其解记为 u^h ; 弯曲问题 (2) 采用 3 次 Hermite 插值单元, 其解记为 w^h , 在单元上分别用结点位移表示为

$$\left. \begin{aligned} u^h &= \sum_{i=1}^2 N_i(x) u_i^h \\ w^h &= \sum_{i=1}^2 (N_i^0(x) w_i^h + N_i^1(x) \theta_i^h) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

熟知, 若没有弹性地基 ($k = 0$), 则两类单元均为精确单元 (即矩阵位移法的单元); 而有了弹性地基 ($k > 0$), 则两类单元都是近似单元了。

图 3 和图 4 给出了典型的精确单元和近似单元解答的误差图, 从中可以看出, 精确单元结点处没有误差, 近似单元结点处误差也比单元内的微小, 误差主要来自单元内部, 来自固端情况。

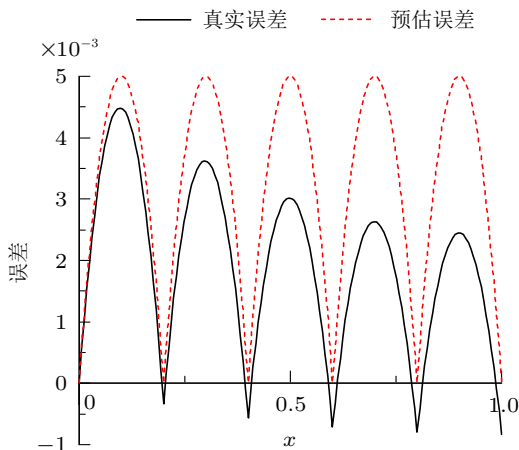


图 3 例 1 位移误差图

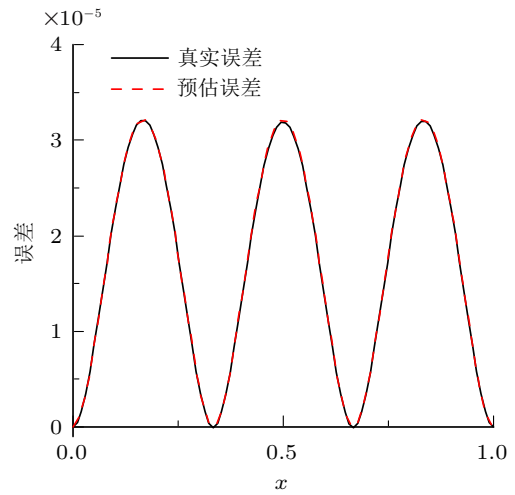


图 4 例 2 位移误差图

3 EEP 解和自适应

以上两个问题的有限元解, 都已建立了 EEP 超收敛解的公式, 可以计算单元 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 上任意一点 $x \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 的 EEP 超收敛解, 根据本文问题直接引用如下。

(1) 二阶问题^[5]

$$u^* = u^h + h \left[N_1 \int_{\bar{x}_1}^x (f - Lu^h) N_2 dx + N_2 \int_x^{\bar{x}_2} (f - Lu^h) N_1 dx \right] \quad (4)$$

(2) 四阶问题^[7]

$$w^* = w^h + \bar{J} \bar{v}_3^h \quad (5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{J} &= (\bar{J}_2^0 \quad \bar{J}_2^1 \quad -\bar{J}_1^0 \quad -\bar{J}_1^1) \\ \bar{J}_2^\alpha &= \int_{\bar{x}_2}^x (f - Lw^h) N_1^\alpha dx \\ \bar{J}_1^\alpha &= \int_{\bar{x}_1}^x (f - Lw^h) N_2^\alpha dx \end{aligned} \right\} \alpha = 0, 1$$

$$\bar{v}_3^h = \begin{pmatrix} (\bar{x}_1 - x)^3/6 \\ (\bar{x}_1 - x)^2/2 \\ (\bar{x}_2 - x)^3/6 \\ (\bar{x}_2 - x)^2/2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

特别地, 当 $k = 0$ 时, 由于是精确单元, 其结点位移是精确的, 还满足 $Lu^h = 0$ 和 $Lw^h = 0$ 。此时, EEP 解亦为精确解, 可以直接用来估计精确单元的误差 (或计算其精确解), 计算上也更加简洁。

二阶问题

$$e^h = u - u^h = h \left(\bar{N}_1 \int_{\bar{x}_1}^x f \bar{N}_2 dx + \bar{N}_2 \int_x^{\bar{x}_2} f \bar{N}_1 dx \right) \quad (7)$$

四阶问题

$$e^h = w - w^h = \hat{J} \bar{v}_3^h \quad (8)$$

其中 $\hat{J}$ 的分量简化为

$$\hat{J}_2^\alpha = \int_x^{\bar{x}_2} f N_1^\alpha dx, \quad \hat{J}_1^\alpha = \int_{\bar{x}_1}^x f N_2^\alpha dx, \quad \alpha = 0, 1 \quad (9)$$

式中, e^h 为有限元解在单元上的误差。注意, 此时的误差计算并不包含有限元解。

目前, 基于 EEP 解的自适应有限元分析已得到长足发展。由于精确解未知, 实际计算时, 用 EEP 超收敛解代替精确解进行后验误差估计, 其求解目标是: 寻求一个网格使得有限元解按最大模满足给定的误差限 tol , 即要求满足

$$\max |e^{*h}(x)| \leq tol, \text{ 在所有单元上} \quad (10)$$

式中, $e^{*h} = u^* - u^h$ 或 $e^{*h} = w^* - w^h$ 。这样, 自适应分析就需要在初始网格上首先求有限元解, 然后计算 EEP 解并估计各个单元的误差 e^{*h} , 对那些不满足式 (10) 的单元进行二分, 形成新网格后再次求有限元解, 如此循环迭代, 直至所有单元满足式 (10) 为止。

4 固端法

自适应过程中, 最耗时的是各级网格上的有限元求解及相应的 EEP 解的计算, 能否尽量减少、甚至避免有限元计算? 并非没有可能。

为此, 稍加仔细地考察一下精确单元的自适应。如前文所述, 精确单元的误差完全来自固端解。参见精确单元的 EEP 式 (7) 和式 (8), 不仅所计算的误差 e^h 都是精确的, 而且并没有出现有限元解 u^h 或 w^h 。更利好的是, 对于本文的常系数和常载荷情况, 精确单元的误差 e^h 及其最大值 $e_{\max}^h \equiv \max |e^h|$ 都可以很简单地事先算出来:

二阶问题精确单元

$$e^h = u - u^h = \frac{f(h-x)x}{2}, \quad e_{\max}^h = \frac{fh^2}{8} \quad (11)$$

四阶问题精确单元

$$e^h = w - w^h = \frac{fx^2(h-x)^2}{24}, \quad e_{\max}^h = \frac{fh^4}{384} \quad (12)$$

其实, 以上最大误差就是结构力学中熟知的, 均布载荷作用下, 单元两端固定时其中点的最大位移 (挠度)。这样, 令 $e_{\max}^h \leq tol$, 便可以一举确定出所允许的单元长度:

二阶问题

$$h \leq \sqrt{8tol/f} \quad (13)$$

四阶问题

$$h \leq \sqrt[4]{384tol/f} \quad (14)$$

式 (13) 和式 (14) 便可以用来直接确定单元的允许长度, 而无需反复地自适应迭代计算。用单元固端解预估单元的误差并确定其允许长度, 本文将其称为固端法。

由于近似单元的误差主要来源于固端解, 因此固端法可以有效地应用于近似单元。定性角度看, 固端法要求单元长度 h 足够小, 以使有限元解对固端情况达到满意的精度, 否则对整体结构恐难达到满意的精度。对于精确单元, 固端法是精确的先验定量误差估计; 对于近似单元, 则是略掉了结点位移误差 (高阶微量) 意义下的先验定量估计。一句话, 精确单元的自适应有多简单, 近似单元的自适应也可以同样简单。以下用算例说明。

5 数值算例

选取与文献 [1] 相同的两个算例。仅采用均分网格。考虑两种问题: (1) 给定单元数, 用固端法预估误差, 并与真实误差比较; (2) 给定误差限 tol , 用固端法预估误差、确定网格, 并用真实误差检验。算例中, 统一取 $k = f = q = 1$ 。虽然没有单独给出精确单元 ($k = 0$) 的真实最大误差, 但此时预估最大误差即为其真实最大误差, 可以参照, 也因此没必要给出。

例 1 二阶问题

问题 (1) 的求解结果列于表 1 左半部, 可以看出, 用固端法预估的误差 ($h^2/8$) 均稍大于真实误差, 用来做误差估计是安全可靠的。问题 (2) 的求解结果列于表 1 右半部, 可以看出, 预估网格的结果都满足误差限, 且真实误差均略小于预估误差。以 $tol = 0.005$ 为例, 由式 (13) 可有 $h = 0.2$, 恰好 5 个单元, 其位移误差图示于图 3, 可直观看到逐点均满足误差限。从表 1 中还可以看出, 取 4 个单元则不能满足误差限。

表 1 例 1 二阶问题的结果

问题 (1)					问题 (2)			
单元数	h	预估最大误差	真实最大误差	tol	预估单元数	h	预估最大误差	真实最大误差
1	1	0.125 00	0.082 68	0.005	5	1/5	0.005 000	0.004 484
2	1/2	0.031 25	0.024 39	0.001	12	1/12	0.000 868	0.000 828
4	1/4	0.007 81	0.006 83	0.000 5	16	1/16	0.000 488	0.000 471
8	1/8	0.001 95	0.001 82	0.000 1	36	1/36	0.000 096	0.000 095

例 2 四阶问题

问题 (1) 的求解结果列于表 2 左半部，可以看出，用固端法预估的误差 ($h^4/384$) 均稍大于真实误差，用来做误差估计是安全可靠的。问题 (2) 的求解结果列于表 2 右半部，可以看出，预估网格的结果

都满足误差限，且真实误差均略小于预估误差。以 $tol = 0.000 05$ 为例，由式 (13) 可有 $h = 0.66$ ，理论上需要 1.5 个单元，实际取大于该值的最小整数，即 2 个单元，其位移误差图示于图 4，可直观看到逐点均满足误差限。

表 2 例 2 四阶问题的结果

问题 (1)					问题 (2)			
单元数	h	预估最大误差	真实最大误差	tol	预估单元数	h	预估最大误差	真实最大误差
1	1	0.002 604 2	0.002 588 3	0.000 50	2	1/2	0.000 162 8	0.000 162 2
2	1/2	0.000 162 8	0.000 162 2	0.000 10	3	1/3	0.000 032 2	0.000 032 1
4	1/4	0.000 010 2	0.000 010 1	0.000 05	3	1/3	0.000 032 2	0.000 032 1

6 结语

本文提出的固端法，作为先验定量的误差估计方法，可以根据给定的误差限，直接确定允许的单元长度，一举得到允许的网格划分，极大地简化了有限元误差估计的计算，大量减少自适应有限元求解的迭代步骤，并大幅提升自适应有限元求解的效率。该法在其他问题中亦获得有效的应用和推广，甚至在二维有限元中也初步显示成功，这些将另文介绍。

参 考 文 献

1 袁骊. 从矩阵位移法看有限元应力精度的损失与恢复. 力学与实践, 1998, 20(4): 1-6
Yuan Si. The loss and recovery of stress accuracy in FEM as seen from matrix displacement method. *Mechanics in Engineering*, 1998, 20(4): 1-6 (in Chinese)
2 龙驭球, 包世华, 袁骊. 结构力学教程 (II). 北京: 高等教育出版社, 2019
Long Yuqiu, Bao Shihua, Yuan Si. *Structural Mechanics (II)*. Beijing: Higher Education Press, 2019 (in Chinese)
3 Strang G, Fix G. *An Analysis of the Finite Element Method*. New Jersey: Prentice-Hall, 1973
4 Douglas J, Dupont T. Galerkin approximations for the two point boundary problems using continuous piecewise polynomial spaces. *Numerische Mathematik*, 1974, 22(2): 99-109

5 袁骊, 王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法. 工程力学, 2004, 21(2): 1-9
Yuan Si, Wang Mei. An element-energy-projection method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional FEM. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(2): 1-9 (in Chinese)
6 袁骊, 林永静. 二阶非自伴两点边值问题 Galerkin 有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法. 计算力学学报, 2007, 24(2): 142-147
Yuan Si, Lin Yongjing. An EEP method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional Galerkin FEM for second order non-self-adjoint Boundary-Value Problem. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, 24(2): 143-147 (in Chinese)
7 袁骊, 王枚, 和雪峰. 一维 C^1 有限元超收敛解答计算的 EEP 法. 工程力学, 2006, 23(2): 1-9
Yuan Si, Wang Mei, He Xuefeng. Computation of super-convergent solutions in one-dimensional C^1 FEM by EEP method. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(2): 1-9 (in Chinese)
8 袁骊, 肖嘉, 叶康生. 线法二阶常微分方程组有限元分析的 EEP 超收敛计算. 工程力学, 2009, 26(11): 1-9
Yuan Si, Xiao Jia, Ye Kangsheng. EEP super-convergent computation in FEM analysis of FEMOL second order ODEs. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(11): 1-9 (in Chinese)
9 袁骊, 王枚, 王旭. 二维有限元线法超收敛解答计算的 EEP 法. 工程力学, 2007, 24(1): 1-10
Yuan Si, Wang Mei, Wang Xu. An element energy

- projection method for super-convergent solutions in two-dimensional finite element method of lines. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(1): 1-10 (in Chinese)
- 10 Yuan S, Wu Y, Xu JJ, et al. A super-convergence strategy for two-dimensional fem based on element energy projection technique. *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2017, 12(11): 1284-1294
 - 11 Yuan S, Wu Y, Xing QY. Recursive super-convergence computation for multi-dimensional problems via one-dimensional element energy projection technique. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(7): 1031-1044
 - 12 Zhao QH, Zhou SZ, Zhu QD. Mathematical analysis of EEP method for one-dimensional finite element post processing. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 28(4): 441-445
 - 13 袁骊, 邢沁妍, 叶康生. 一维 C^1 有限元 EEP 超收敛位移计算简约格式的误差估计. *工程力学*, 2015, 32(9): 16-19
Yuan Si, Xing Qinyan, Ye Kangsheng. An error estimate of EEP super-convergent displacement of simplified form in one-dimensional C^1 FEM. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(9): 16-19 (in Chinese)
 - 14 Yuan S, He XF. Self-adaptive strategy for one-dimensional finite element method based on element energy projection method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(11): 1461-1474
 - 15 Yuan S, Xing QY, Wang X, et al. Self-adaptive strategy for one-dimensional finite element method based on EEP method with optimal super-convergence order. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 29(5): 591-602
 - 16 Yuan S, Ye KS, Wang YL, et al. Adaptive finite element method for eigensolutions of regular second and fourth order Sturm-Liouville problems via the element energy projection technique. *Engineering Computations*, 2017, 34(8): 2862-2876
 - 17 Yuan S, Du Y, Xing QY, et al. Self-adaptive one-dimensional nonlinear finite element method based on element energy projection method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(10): 1223-1232
 - 18 Jiang KF, Yuan S, Xing QY. An adaptive nonlinear finite element analysis of minimal surface problem based on element energy projection technique. *Engineering Computations*, 2020 (in press)
 - 19 Yuan S, Dong YY, Xing QY, et al. Adaptive finite element method of lines with local mesh refinement in maximum norm based on element energy projection method. *International Journal of Computational Methods*, 2020, 17(4): 209-222
 - 20 Dong YY, Yuan S, Xing QY. Adaptive finite element analysis with local mesh refinement based on a posteriori error estimate of element energy projection technique. *Engineering Computations*, 2019, 36(6): 2010-2033

(责任编辑: 胡漫)