

钢压杆稳定设计的直接计算法

王正中

(西北农业大学水利与建筑工程学院, 杨陵 712100)

摘要 本文根据钢结构设计理论及规范, 提出了钢压杆整体稳定设计的直接计算法, 既不需试算或迭代计算, 又不依赖图表, 便于机算设计。

关键词 钢压杆, 稳定设计, 直接法

钢压杆在土木工程中应用非常广泛, 其整体稳定性的设计要进行反复的试算, 查表, 改变截面, 设计过程相当繁琐, 其实质是求解高次隐函数的整体稳定性方程。对该问题的研究, 在《力学与实践》上刊登了近 10 篇文章, 多年设计实践表明, 这些方法对生产设计起到了很好的指导作用; 特别是直接计算法^[1~5]具有不依赖图表, 便于机算, 误差较小等优点, 极受设计者欢迎。但是这些直接计算法仍存在以下几点不足: 无法事先判断压杆类型, 因而还要试算; 引入参数太多, 计算公式复杂繁琐; 计算结果误差大, 有的还没有考虑稳定安全系数随柔度的变化。基于以上原因, 本文根据钢结构稳定理论及规范, 通过对大柔度及中小柔度钢压杆稳定方程的变形及数学处理求解稳定方程, 得到钢压杆整体稳定设计的直接方法, 克服了以上局限性, 特别便于机算。

1 钢压杆整体稳定方程

根据文献[6]得知轴心钢压杆整体稳定方程如下

$$\frac{P}{A} \leq [\sigma] \quad (1)$$

式中, P 为轴心压力, A 为构件截面积, $[\sigma]$ 为材料容许应力, φ 为轴心受压构件稳定系数。

对细长杆即 $\lambda_c < \leq 250$ 时

$$\varphi = \frac{1}{1.33^2} \left[1.28 - 0.13 \left(\frac{\lambda_c}{250 - \lambda_c} \right)^2 \right] \quad (2)$$

对中长杆即 $\lambda_c \leq \lambda_c$ 时

$$\varphi = \frac{\frac{\lambda_c}{2} - 0.43}{\frac{\lambda_c}{2} + 0.28} \quad (3)$$

其中

$$\lambda_c = 1.33 \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}}, \quad \lambda_c = l_0 \sqrt{A/I} \quad (4)$$

式中, l_0 为计算长度, I 为截面对应方向的惯性矩。

2 钢压杆整体稳定方程的变形及求解

2.1 整体稳定方程的恒等变形

若将(4)式两端平方并乘以(1)式(极限状态取等号)即得

$$\frac{P^2}{IP} = \frac{[A]^2 l_0^2}{IP} \quad (5)$$

显然, 对于任何支承、任何截面的钢压杆(5)式右端必为一已知的无量纲数, 故可设其为 φ , 即

$$\frac{P^2}{IP} = \varphi \quad (6)$$

于是

$$\frac{P^2}{IP} = \varphi \quad (7)$$

2.2 稳定系数 求解

对于中长杆只要将(3)式与(7)式联立, 即得到关于整体稳定系数 φ 的一元二次方程即

$$0.28 \varphi^2 + (\frac{\lambda_c}{2} + 0.43) \varphi - \frac{\lambda_c}{2} = 0 \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{-\frac{\lambda_c}{2} - 0.43 + \sqrt{(\frac{\lambda_c}{2} + 0.43)^2 + 1.12 \frac{\lambda_c}{2}}}{0.56} \quad (9)$$

对细长杆采用相同方法处理, 则会产生一个 5 次方程, 因而无法直接求解; 为此, 采用最佳拟合原理将稳定系数 φ 中的特殊安全系数 K_r 用关于 λ_c 的函数表达, 其最大误差不超过 1%, 并且是偏于安全的, 此时

$$\varphi = \frac{\frac{\lambda_c}{2} (\frac{\lambda_c}{2} - 9.84 \frac{\lambda_c}{2} + 5.525 \times 10^5)}{20(250^2 - \frac{\lambda_c}{2})^2} \quad (10)$$

再采用与中长杆相同的处理办法求解 φ , 即可得

$$\varphi = \frac{\sqrt{2 - \frac{80(250^2 - \frac{\lambda_c}{2})}{2} (9.84 \frac{\lambda_c}{2} - 5.525 \times 10^5)}}{40(250^2 - \frac{\lambda_c}{2})} \quad (11)$$

3 钢压杆稳定设计直接方法

3.1 钢压杆稳定系数计算公式

对于工程上常用的 A3 钢 $\sigma_c = 123$; 16Mn 钢 $\sigma_c = 100$.

若 $[\sigma]$ 单位取 MPa, P 的单位取 kN 时, 则 (9) 式、(11) 式可化简为

对 A3 钢

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{(15.1 + 0.43 \lambda)^2 + 17} - 0.43 \lambda - 15.1}{0.56} & (\lambda < 35) \\ \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1.01 \times 10^5} + \lambda}{125} & (\lambda \geq 35) \end{cases} \text{ 压杆} \quad \text{闻}$$

定要求往取翼缘板宽厚比为腹板宽厚比的一半, 而且按构造要求截面的宽高比等于 1, 此时若设翼缘宽厚比为 λ , 则

$$= \frac{11.54 \lambda / l l_0^2}{(\lambda + 1)^2 P} \quad (20)$$

4 应用举例

例 1 A3 钢圆截面压杆, 一端固定另一端自由, 已知 $l = 800$ mm, $P = 100$ kN, 许用应力为 $[\sigma] = 170$ MPa, 试设计压杆直径 d .

解 由 (14) 式得

$$= \frac{4 \lambda / l l_0^2}{P} = 54.689 > 35$$

按 (12b) 式计算

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1.01 \times 10^5} + \lambda}{125} = 0.3519$$

由 (1) 式计算

$$d = \sqrt{\frac{4P}{[\sigma]}} = 0.046134 \text{ m} = 46.134 \text{ mm}$$

例 2 除 $l = 200$ mm 外, 其它条件同例 1, 求压杆直径.

解 由 (15) 式得

$$= \frac{4 \lambda / l l_0^2}{P} = 3.418 < 35$$

按 (12a) 式计算

$$= \frac{\sqrt{(15.1 + 0.43 \lambda)^2 + 17} - 0.43 \lambda - 15.1}{0.56}$$

$$= 0.8721$$

由 (1) 式计算

$$d = \sqrt{\frac{4P}{[\sigma]}} = 0.0293 \text{ m} = 29.3 \text{ mm}$$

3.2 常用截面柱无量纲数 λ 的计算

工程中常用的钢压杆有圆形、圆管、矩形、箱形、工字形等多种形式; 对于薄壁截面其截面厚度往往取决于局部稳定性, 其宽高比则取决于构造及约束条件. 下面给出集中反映整体稳定、截面特征及荷载大小等因素的无量纲数 λ 的计算方法.

圆形截面:
$$= \frac{4 \lambda / l l_0^2}{P} \quad (14)$$

方形截面:
$$= \frac{12 \lambda / l l_0^2}{P} \quad (15)$$

矩形截面:
$$= \frac{12 \lambda / l l_0^2}{P} \quad (16)$$

在垂直短边平面内失稳, λ 为长边与短边之比.

圆管截面:
$$= \frac{4 (1 - \lambda^2) / l l_0^2}{(1 + \lambda^2) P} \quad (17)$$

为圆管内径与外径之比.

方管截面:
$$= \frac{12 (1 - \lambda^2) / l l_0^2}{(1 + \lambda^2) P} \quad (18)$$

为内边长与外边长之比.

箱形截面: 为保证薄壁截面局部稳定性同步, 取

$$= \frac{2t_1}{h} = \frac{2t_2}{b}, \text{ 则}$$

$$= \frac{12 \lambda / (1 + \lambda^2) - \lambda^2 / l l_0^2}{[1 - (\lambda^2) (1 - \lambda^2)] P} \quad (19)$$

在垂直于短边方向失稳, $\lambda = b/h$

t_1 为与 h 边对应的壁厚, t_2 为与 b 对应的壁厚, h 为长边长, b 为短边长.

工字形组合截面: 对于组合工字形柱, 根据局部稳

参 考 文 献

- 1 沈养中. 压杆截面设计的直接设计法. 力学与实践, 1989, 11(4): 63~64
- 2 赵显慧. 大柔度钢压杆稳定性设计的通用公式. 力学与实践, 1990, 12(4): 60~61
- 3 胡洪增. 折减系数 ϕ 的近似计算及压杆横截面尺寸直接确定. 力学与实践, 1991, 13(4): 69~70

(下转第 33 页)

其中 $\{ \}$ 、 $\{ P \}$ 为结构 n 维结点位移和外力列阵； $[B]$ 为杆件方位有关的 $(n \times m)$ 维稀疏矩阵； $[M]$ 为 $(n \times n)$ 维质量矩阵。

由方程 (6) ~ (9) 可得结构机电耦合动力学方程

$$[M] \{ \ddot{u} \} + [B] [\] [B]^T \{ \dot{u} \} - [B] [\] \{ u \} = \{ P \} \quad (10)$$

$$[\]^T [B]^T \{ \dot{u} \} + [\] \{ u \} = \{ Q \} \quad (11)$$

利用方程 (11) 消去式 (10) 中电势坐标得最终的耦合动力学方程

$$[M] \{ \ddot{u} \} + [B] [\] [B]^T \{ \dot{u} \} = \{ P \} + [B] [\] [\]^{-1} \{ Q \} \quad (12)$$

其中 $[\] = [\]_n + [\]_{12} [\]_{22}^{-1} [\]_{12}^T$ 为考虑耦合效应时的等效刚度矩阵。

对结构检测元件 (可是一个基本单元)，其电载荷 $\{ Q \}$ 为零，由方程 (11) 可得

$$\{ u \} = - [\]_{22}^{-1} [\]_{12}^T [B]^T \{ \dot{u} \} \quad (13)$$

方程 (13) 描述结点机械位移量与检测元件电学量间关系，称为结构系统检测方程。

3 算例分析

如图 2 所示平面桁架，压电陶瓷 (PZT-4) 元件代替 (1,3)、(2,4) 两杆作为主动杆，并设元件由厚度 0.5 cm 的 200 片 PZT-4 圆形薄片迭合而成。结构有关参数如表 1 所示。

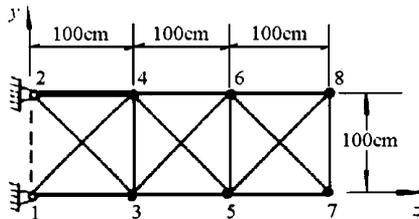


图 2 平面桁架结构

表 1 结构有关参数列表

	压电陶瓷 (PZT-4)	普通材料 (铝合金)
质量密度 (ρ)	7600 kg/m ³	2700 kg/m ³
弹性系数 (E_{33})	8.807 $\times 10^{10}$ N/m ²	7.1 $\times 10^{10}$ N/m ²
压电系数 (e_{33})	18.62 C/m ²	
介电系数 (ϵ_{33})	5.92 $\times 10^{-9}$ C/Vm	
横截面积 (A)	30 $\times 10^{-4}$ m ²	30 $\times 10^{-4}$ m ²

在进行结构动态分析时，取集中质量阵，并就考虑机电耦合效应与否两种情况进行分析，结构前五阶固有频率比较如表 2 所示。

表 2 结构固有频率比较表

固有频率	耦合	非耦合
第 1 阶	469.5	402.9
第 2 阶	1484.1	1483.9
第 3 阶	1698.9	1510.2
第 4 阶	2773.7	2764.0
第 5 阶	3987.9	3810.9

由表 2 可知，考虑机电耦合效应时结构各阶固有频率均较不考虑耦合效应时对应阶固有频率高。这是因为建模时考虑机电耦合效应，相当于考虑了全部机械和电两种形式的势能，因而结构等效刚度阵较不考虑耦合效应时附加了一项关于电学量的半正定阵，则固有频率均有所增加。此外，各阶频率增加值大小与主动杆件位置有关；当压电主动杆数较多时，结构固有频率的增加值将会大一些。因此在结构静/动态分析和控制系统设计时，应充分注意到这一点。

参 考 文 献

- 1 Wada B K. Adaptive structures: an overview. *J Spacecraft & Rockets*, 1990, 27(3): 330 ~ 337
- 2 Lyan Ywan Lu, Utku S, Wada B K. Vibration suppression for large scale adaptive truss structures using direct output feedback control. *J of Intell Mater Syst & Struct*, 1993, 4(3): 385 ~ 397
- 3 Sun C T, Wang R T. Damping augmentation by delayed actuation in adaptive structures. AIAA paper 93-1692-CP
- 4 Gurgiutiu V, Rogers C A, Chaudhry Z. Energy-based comparison of solid-state induced-strain actuators. *J of Intell Mater Syst & Struct*, 1996, 7(1): 4 ~ 14
- 5 孙慷, 张福学. 压电学 (上册). 北京: 国防工业出版社. 1984, 5

(1996 年 10 月 9 日收到第 1 稿,
1997 年 1 月 5 日收到修改稿)

(上接第 31 页)

- 4 任治章. 压杆稳定设计的直接法. *力学与实践*, 1993, 15(1): 66 ~ 69

- 5 赵显慧. 中小柔度钢压杆稳定性设计的通用公式. *力学与实践*, 1996, 18(3): 68 ~ 69
- 6 武汉水电学院编. *水工钢结构*. 北京: 水利出版社, 1985
(1996 年 12 月 12 日收到第 1 稿,
1997 年 2 月 3 日收到修改稿)