

图2  $wD$

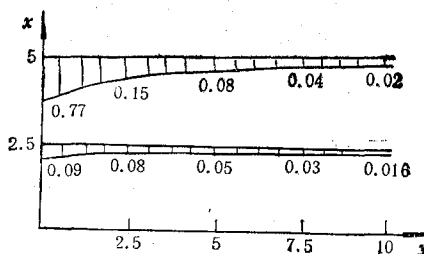


图3  $M_x$

$\nu = 10$ , 算出距  $y$  轴 2.5 及 5 处的  $w$  和  $M_x$  如图(2), (3)所示。

计算表明级数收敛较快。为了比较, 本文还对两对边简支, 两对边自由的矩形板中点受集中力进行计算。当简支边与自由边之比为 4 时, 算出中点  $w$  与无限长板中点  $w$  都是 1.69。本文结果可用来计算较长

板及估计矩形板的最小值。

本文在写作中得到肖明心教授指导, 特此致谢!

### 参 考 文 献

- [1] 杨耀乾, 平板理论, 中国铁道出版社(1984).
- [2] 徐芝纶, 弹性力学(下册), 人民教育出版社(1980).

## 用 Liapunov 方法讨论中心力场中轨道及运动稳定性

宋 伟 忠

(青海师范大学)

### 1. 引 言

一些文献对中心力场中质点圆轨道的稳定性作了讨论, 采用的典型方法通常分为两类, 第一类用有效势能概念, 此法是正确的<sup>[1,2]</sup>. 第二类用轨道微分方程比耐公式, 此法最后归结为用一次近似方程判别稳定性<sup>[3,4]</sup>. 遗憾的是此处恰出现两种临界情况: 特征值有一对共轭纯虚根或一对重零根, 因此用此法所得的结论是不足信的.<sup>[5]</sup>

### 2. 任意中心力场中圆轨道的稳定性

本节采用 Liapunov 方法对上述比耐公式法作了如下改进研究。

设质点  $m$  在中心引力场  $F(r)$  中沿任意轨道  $r_0(\theta)$  运行, 令

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}, \quad \frac{du}{d\theta} = u', \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = u'',$$

则  $u_0(\theta) = \frac{1}{r_0(\theta)}$  应满足

$$u_0'' + u_0 = -\frac{F(u_0)}{mh_0^2 u_0^2} \quad (1)$$

设  $t$  时刻  $m$  在轨道平面内极角  $\theta$  处受扰, 从而使其后轨道  $u = u_0 + \xi$ ,  $u' = u_0' + \xi' = u_0' + \eta$ , 且初受扰位置有  $u(\theta) = u_0(\theta) + \xi_0$ ,  $u'(\theta) = u_0'(\theta) + \eta_0$ . 则  $t$  后对  $u(\theta)$  也有

$$u'' + u = -\frac{F(u)}{mh^2u^2} \quad (2)$$

式(2)减去式(1)得

$$\xi'' + \xi = \frac{F(u_0)}{mh_0^2u_0^2} - \frac{F(u_0 + \xi)}{mh^2(u_0 + \xi)^2} \quad (3)$$

原则上可在  $h \approx h_0$  及任意  $u_0(\theta)$  下对(3)表示的非自治系统的零解稳定性进行讨论<sup>[1]</sup>, 但事实上在经典力学范围内平方反比力场(第三节研究)以外的中心力场缺乏实践意义, 不失普遍性为简单起见, 沿用一般文献讨论范围内, 对  $h = h_0$  条件下扰动, 进行任意中心引力  $F(r)$  下半径  $r_0$  的圆轨道的稳定性研究. 显然此时

$$u_0(\theta) \equiv \frac{1}{r_0}, \quad u_0' = u_0'' \equiv 0,$$

从而由(1),(3)式简化为自治系统

$$\xi'' + \xi = -u_0 - \frac{F(u_0 + \xi)}{mh^2(u_0 + \xi)^2} \quad (4)$$

进一步, 圆轨  $r_0$  的稳定性等价于

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\theta} &= \eta \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= -\xi - u_0 - \frac{F(u_0 + \xi)}{mh^2(u_0 + \xi)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

的零解  $\xi = \eta = 0$  的稳定性问题.

由下述积分形成关键的  $\xi, \eta$  平面上的 Liapunov 函数

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) &= 2 \int_0^\eta \eta d\eta + 2 \int_0^\xi \left[ \xi + u_0 + \frac{1}{mh^2} \frac{F(u_0 + \xi)}{(u_0 + \xi)^2} \right] d\xi \\ &= \xi^2 + \eta^2 + 2u_0\xi + \frac{2}{mh^2} \int_0^\xi \frac{F(u_0 + \xi)}{(u_0 + \xi)^2} d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

则  $v(0,0) = 0$  且沿(5)的积分曲线

$$\frac{dv}{d\theta} = 2\eta\eta' + 2\xi\xi' + 2u_0\xi' + \frac{2}{mh^2} \frac{F(u_0 + \xi)}{(u_0 + \xi)^2} \cdot \xi' \equiv 0 \quad (7)$$

将  $v(\xi, \eta)$  在  $(0,0)$  附近展开成幂级数.

$$v(\xi, \eta) = \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_0 \xi + \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_0 \eta + \frac{1}{2} (\xi, \eta) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \text{高阶项} \quad (8)$$

易得  $\left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_0 = \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_0 = 0$ , 从而  $(0,0)$  为  $v$  的逗留值点, 又二阶项中  $\left( \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right)_0 = 2$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0$ , 且可算得

$$\left( \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right)_0 = 2 \left( 3 - \frac{F}{F} u_0 \right)$$

式中

$$F = F(u_0), \quad F' = F'(u_0) = \left. \frac{dF(u_0 + \xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0}$$

因此

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \end{bmatrix}_0 = 2 \begin{bmatrix} 3 - \frac{F}{F} u_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

讨论:

(1) 当  $3 - \frac{F' u_0}{F} > 0$  时(9)为正定矩阵, 故  $v(\xi, \eta)$  必在  $(0,0)$  某闭邻域  $\Omega$  内取严格极小值, 即对  $(\xi, \eta) \in \Omega$ ,

$(\xi, \eta) \cong (0, 0)$  均有  $v > 0$ ,  $v(\xi, \eta)$  为  $\Omega$  内定正函数, 再考虑到(7)由 Liapunov 稳定性定理<sup>[3]</sup>便得(5) 零解稳定, 亦即圆轨  $u_0 \equiv \frac{1}{r_0}$  是稳定的.

此处还应强调, 当初扰动较大,  $(\xi_0, \eta_0) \notin \Omega$ , 则圆轨  $r_0$  仍可能不稳定.

(2)  $3 - \frac{F' u_0}{F} = 0$  时, 式(9)是退化矩阵, 此时  $v(\xi, \eta)$  在  $\Omega$  邻域的定正性还要考虑式(8)的高阶项才能确定, 故圆轨  $r_0$  的稳定与否此处仍未定, 下面是此种情况下一个稳定圆轨的例子.

质点  $m$  在中心力场  $F = -mk^2 u^2 - 3mk^2 \frac{u^4}{u_0^2} + mk^2 \frac{u^6}{u_0^4}$  中绕圆轨  $u_0 \equiv \frac{1}{r_0}$  运行, 计算得  $3 - \frac{F' u_0}{F} = 0$ , 将  $F$  式代入(1)算得  $u_0 h^2 = 3k^2$ , 再将  $F$  代入(6)运算并考虑上式得

$$v(\xi, \eta) = \eta^2 + \frac{\xi^2}{u_0^2}.$$

显然  $v$  为定正函数, 由 (7)  $\frac{dv}{d\theta} \equiv 0$ . 故判定此力场中圆轨  $r_0$  稳定.

因此过去对此时轨道必不稳定的证明是错的<sup>[2, 3]</sup>.

(3)  $3 - \frac{F' u_0}{F} < 0$  时, (9)的特征值一正一负, 故  $v(\xi, \eta)$  在  $(0, 0)$  的任意邻域均有正值、负值和零, 用  $v(\xi, \eta)$  判别稳定性无效, 此处最简单有效的是回到一次近似方法, 将  $\frac{F(u_0 + \xi)}{(u_0 + \xi)^2}$  在  $(0, 0)$  附近展开幂级数保留至线性项, (5)即为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\theta} &= \eta \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= -\left(3 - \frac{F' u_0}{F}\right) \xi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其特征值  $\lambda = \pm \sqrt{\frac{F' u_0}{F} - 3}$  之一为正实数, 故由稳定性理论,<sup>[5]</sup>  $u_0 \equiv \frac{1}{r_0}$  圆轨不稳定.

### 3. 平方反比力场中轨道的稳定性

显然当  $F(r)$  为平方或立方反比力时, (3)均成为线性方程, 从而易于讨论零解的稳定性, 本节仅讨论具有重要实际意义的平方反比力场中任意轨道的稳定性.

首先设质点  $m$  在平方反比引力场  $F = -mk^2 u^2$  中沿闭轨(圆及椭圆)运行, 注意到  $\theta$  角时轨道位矢偏差

$$\Delta r = r(\theta) - r_0(\theta) = -\frac{\xi}{u_0^2 + u_0 \xi} \quad (11)$$

因为  $m$  沿闭轨运行,  $u_0 \geq \frac{1}{r_{\max}} > 0$  为一有限量而不趋向零, 从而  $\Delta r$  与  $\xi(\theta)$  为同阶小量

$$\Delta r \sim \xi \quad (12)$$

因此可作下述稳定性定义: 如果初扰动很小, 即有微量  $\varepsilon > 0$  使  $|\xi_0| < \varepsilon$ ,  $|\eta_0| < \varepsilon$ ,  $|\Delta h| < \varepsilon$ , 若对其后任意  $\theta$ ,  $|\xi(\theta)| = |u - u_0|$  也能始终保持很小, 则质点原轨道  $u_0(\theta)$  称为稳定的.

将  $F(u) = -mk^2 u^2$  代入(3)得

$$\xi'' + \xi = k^2 \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) = -\frac{k^2(h + h_0)}{h^2 h_0^2} \Delta h = -H \Delta h \quad (13)$$

考虑初始  $\bar{\theta}$  时,  $\xi(\bar{\theta}) = \xi_0$ ,  $\xi'(\bar{\theta}) = \eta_0$  得解

$$\xi(\theta) = \sqrt{(\xi_0 + H \Delta h)^2 + \eta_0^2} \cos(\theta - \phi) - H \Delta h \quad (\phi \text{ 为积分常数}) \quad (14)$$

从而

$$|\xi(\theta)| \leq (\sqrt{(1+H)^2 + 1} + |H|) \varepsilon \quad (15)$$

显然  $H = \frac{k^2(h + h_0)}{h^2 h_0^2}$  为有限数, 故  $|\xi(\theta)|$  确能始终保持很小, 且  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi(\theta) = 0$ , 从而闭轨是稳定轨道.

其次当质点在平方反比力场中沿抛物线或双曲线轨道运行时,未受扰轨道  $u_0 = \frac{1}{r_0(\theta)}$  均有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \theta_{r_0}$  (如图近日点  $\theta = 0$  时,抛物线  $\theta_1 = \pi$ 、双曲线  $\theta_1$  为轨道渐近线方位角)  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_0 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} u_0(\theta) = 0$ 。对任意初扰  $\xi_0, \eta_0, \Delta h$  一般由式(14)有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} \xi(\theta) = \xi(\theta_1) \neq 0$ , 从而虽然扰动后式(15)仍显示  $|\xi(\theta)|$  很小, 但由式(11)

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1} |\Delta r| = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} \frac{1}{u_0} \cdot \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} \left| \frac{\xi(\theta)}{u_0 + \xi(\theta)} \right| = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} \frac{1}{u_0} = +\infty$$

即平方反比引(斥)力场中的抛物线、双曲线(双曲线)轨道均是不稳定的。

这样文献[6]的结论:平方反比力场中一切轨道都是稳定的便是错误的。

上述稳定性讨论限制扰动在轨道面内发生,若取消限制,扰动在三维空间发生,沿抛物线、双曲线轨道显然仍不稳定;对闭轨,天体力学的瞬时摄动理论已给出了受扰后确定一条空间轨道的六个轨道根数的增量式<sup>[5]</sup>, 这些式子充分表明圆及椭圆轨道仍是稳定的。

#### 4. 平方反比力场中运动均不稳定

研究 Liapunov 意义下质点运动  $r_0(t)$  的稳定性,本来应以  $t$  为自变量从动力学式  $m\ddot{r}(t) = F[r(t)] \frac{r}{r}$  出发, 但为简单起见不失普遍性,作如下讨论。

设扰动仅在未扰前运动  $r_0(t)$  所在平面内发生,采用极坐标,取扰动前后轨道

$$\left. \begin{aligned} r_0(\theta), r(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

图 1  
而扰动后运动

$$\left. \begin{aligned} r(t) \\ \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

设  $t(\theta)$  为  $\theta(t)$  的反函数改换自变量  $t$  为  $\theta$  改写式(17)为

$$\left. \begin{aligned} r(\theta) = r[t(\theta)] \\ t(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

而相应的未受扰运动式则为

$$\left. \begin{aligned} r_0(\theta) \\ r_0(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

比较式(16)与式(18)、(19)易得两个普遍正确的结论:

- (1) 轨道稳定不一定有运动稳定
- (2) 运动稳定则必有轨道稳定

下面研究平方反比力场中质点运动稳定性,由第三节此力场中轨道仅包括下述两类。

- a. 质点作抛物线、双曲线运动,此时轨道是不稳定的,故由结论(2)沿这两种轨道的运动必不稳定。
- b. 质点沿闭轨运动,此时轨道稳定,但由结论(1)运动是否稳定尚未确定,若  $t(\theta) - t_0(\theta)$  始终很小则运动稳定,否则运动不稳定,而此处恰遇一情况。

设扰动前后闭轨长半轴为  $a_0, a$ , 则扰动前后,沿闭轨运行周期  $\tau_0 = 2\pi/k a_0^{3/2}$ 、 $\tau = 2\pi/k a^{3/2}$ , 因为  $a_0, a$  相差极小故  $\tau - \tau_0$  为微量,但从扰动位  $\bar{\theta}$  后,  $\theta$  转过  $n \cdot 2\pi$ , 时差  $t - t_0 \approx n(\tau - \tau_0)$  将随  $n$  持续增大,从而沿闭轨运行质点的运动也是不稳定的。

综上所述,平方反比力场中质点的运动均不稳定。

#### 参 考 文 献

- [1] 朱照宣等,理论力学(上), p316, 北京大学出版社(1982)。
- [2] Marion, J. B., 李筌译,杨润殷校,质点与系统的经典动力学,高等教育出版社(1985), p253~265。
- [3] 周衍柏,理论力学教程(第二版),高等教育出版社(1986), p83~85。
- [4] R. 罗森柏,程迺巽,郭坤译,离散系统分析动力学,人民教育出版社,(1983), p366~367。
- [5] 肖尚斌,董秋泉,高等动力学,西北工业大学出版社,(1986)。
- [6] 朱从镒,质点在有心力场中运动轨道的稳定性,大学物理(1988), p1-2。