

[2] 航空工业部科学委员会编, 应变疲劳分析手册, 科学出版社(1987), 23—39.  
 [3] 吴富民, 复杂载荷下疲劳寿命估算, 固体力学学报 2 (1984); 231—236.  
 [4] Fuchs, H. O. and Stephens, R. I., Metal Fatigue

in Engineering (1980), 45—80.  
 [5] 王中, 高镇同, 疲劳缺口系数  $K_L$  和复杂载荷下寿命估算, 力学学报 4(1986), (18).

(本文于 1990 年 5 月 29 日收到修改稿)

## 应变网络分析的新方法

彭 达 仁

(长沙交通学院)

**摘要** 本文提出了一种处理应变网络数据以确定某点应力状态的新方法, 并推导了计算公式。该法主要是运用最小二乘原理, 考虑若干约束条件, 对应变网络测量数据进行处理, 达到充分利用实验信息, 提高处理精度的目的。实例表明, 效果良好, 有一定应用价值。

**关键词** 应变网络, 最小二乘法, 约束条件

### 1. 前言

利用电阻应变片作为传感元件, 测量构件表面的应变, 然后利用广义虎克定律进行应力应变分析以确定构件表面的应力状态, 是目前实验应力分析中使用较多的一种方法。

平面应力状态下, 主应力方向角  $\alpha_0$  一般是未知的, 要确定该点的应力状态, 必须要有三个独立的数据才行。即需在构件表面贴三个 (或三个以上) 不同方向的应变片, 组成应变网络 (图 1), 以测取三个独立的应变数。

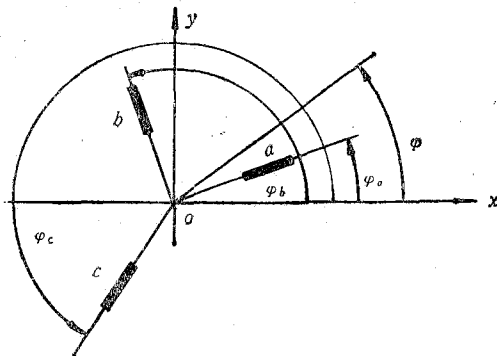


图 1

由材料力学公式知

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi_i} = & \cos^2 \varphi_i \varepsilon_x + \sin^2 \varphi_i \varepsilon_y \\ & + \sin \varphi_i \cos \varphi_i \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1)$$

$(i = 1, \dots, m)$

为了使以下的理论推导过程及结果书写简明, 便于程序化, 我们采用矩阵分析方法。

设  $[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$  应变列阵 ( $3 \times 1$ )

$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$  应力列阵 ( $3 \times 1$ )

$[B] = [\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\varphi_2}, \dots, \varepsilon_{\varphi_m}]^T$  应变测量列阵 ( $m \times 1$ )

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_1 & \sin^2 \varphi_1 & \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \\ \cos^2 \varphi_2 & \sin^2 \varphi_2 & \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \varphi_m & \sin^2 \varphi_m & \sin \varphi_m \cos \varphi_m \end{bmatrix}$$

系数矩阵 ( $m \times 3$ )

于是(1)可写为

$$[A][\varepsilon] = [B] \quad (2)$$

为计算方便, 在实测中一般采用由特殊角度组成的应变网络, 如  $45^\circ$ 、 $60^\circ$  应变花和四片  $45^\circ$ 、 $60^\circ$  应变花等。求某点的应力状态, 关键是如何求出精度较高的  $[\varepsilon]$ 。下面先对传统的计算  $[\varepsilon]$  的方法进行分析, 然后提出一种新的求法。

### 2. 应变网络最小二乘法及其计算公式

用传统的方法, 计算  $45^\circ$ 、 $60^\circ$  应变花和四片  $45^\circ$ 、 $60^\circ$  应变花的应力状态, 其结果可用通式表达

$$\sigma_{1,2} = \left( \frac{E}{1-\mu} \right) A + \left( \frac{E}{1+\mu} \right) \sqrt{B^2 + C^2} \quad (3)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{C}{B} \quad (4)$$

式中  $A, B, C$  各参数随不同的应变花而不同<sup>[3]</sup>。

45°、60° 应变花的  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_0$  是直接求解线性方程组(2), 然后进行应力应变分析求得的。这时系数矩阵  $[A]$  是满秩的。对于四片 60° 应变花及四片 45°, 每个应变网络可给出四个应变读数, 其中有一个应变读数是多余的, 但可利用关系式

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}) = \frac{1}{3}(\varepsilon_0 + \varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}) \quad (5)$$

及

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} = \varepsilon_{45} + \varepsilon_{-45} \quad (6)$$

推出  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_0$  的计算式。

容易看出: 实验值  $\varepsilon_0, \varepsilon_{45}, \varepsilon_{60} \dots$  等若是精确值, 则(5)、(6)是严格成立的。但是, 由于应变片的粘贴质量、匀质性、电阻应变仪的测量精度, 试验人员的熟练程度等因素的影响, 各实验值必定是带有一定误差的, 所以(5)、(6)不一定成立。这样, 利用(5)或(6)去求解四片应变花的应力状态, 达不到通过多余的应变读数去校验其余三个应变读数, 从而提高实验精度的目的。那么如何正确地利用这一多余数据呢? 我们知道, 四片应变花对应的关系矩阵是长方形矩阵 ( $m < n$ ), 对于(2)来说, 这是一个方程数多于未知数的代数方程组, 因此是一超定方程组。我们可求得最小二乘意义下的解。下面进行具体推导。

由于有实验误差的存在, (2) 不能严格成立, 设偏差为  $[E]$  则

$$[E] = [B] - [A][\varepsilon] \quad (7)$$

解的要求:

$$[E]^T[E] \Rightarrow \min$$

而

$$\begin{aligned} [E]^T[E] &= ([A][\varepsilon] - [B])^T \\ &\quad \times ([A][\varepsilon] - [B]) \\ &= [\varepsilon]^T[A]^T[A][\varepsilon] + [B]^T[B] \\ &\quad - [\varepsilon]^T[A]^T[B] - [B]^T[A][\varepsilon] \\ &= [\varepsilon]^T[A]^T[A][\varepsilon] + [B]^T[B] \\ &\quad - 2[\varepsilon]^T[A]^T[B] \end{aligned}$$

力学与实践

为满足解的要求, 必须

$$\frac{\partial}{\partial [\varepsilon]} ([E]^T[E]) = 0$$

得

$$[A]^T[A][\varepsilon] = [A]^T[B]$$

从而  $[\varepsilon]$  的最小二乘解为

$$[\varepsilon] = ([A]^T[A])^{-1} \cdot [A]^T[B] \quad (8)$$

求得  $[\varepsilon]$  后引入刚度矩阵  $[S]$ , 则

$$[\sigma] = [S][\varepsilon] \quad (9)$$

其中

$$[S] = \begin{bmatrix} E & \mu E & 0 \\ 1 - \mu^2 & 1 - \mu^2 & 0 \\ \mu E & E & 0 \\ 1 - \mu^2 & 1 - \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1 - \mu^2} \end{bmatrix}$$

为方便计有时可将  $[\sigma]$  改写为

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

那么任意方向的应力情况为

$$[\sigma_\alpha] = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha & \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha\beta} & \sigma_\beta \end{bmatrix} = [T]^T[\sigma][T] \quad (10)$$

其中

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{旋转矩阵}$$

另外, 应注意到, 因实验值的缘故, (5)、(6) 不一定成立, 但是若将式子的左边改为欲求的未知量  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  等, 即

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{1}{3}(\varepsilon_0 + \varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}) \quad (11)$$

及

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_0 + \varepsilon_{90} = \varepsilon_{45} + \varepsilon_{-45} \quad (12)$$

则等式是成立的。因为实际上  $[\varepsilon]$  中各分量并非完全独立, 它们要受到某些物理和数学上的制约, 而(11)、(12)是应变不变关系, 若将这些约束条件并入(2)中, 运用最小二乘法求解, 还可起到充分利用实验信息, 提高实验数据处理精度的效果。同样的道理, 若将(11)和(12)分别用于 60° 应变花和 45° 应变花的数据处理

表 1

试件	应力状态	$\sigma_1$ (kg/cm <sup>2</sup> )		$\sigma_2$ (kg/cm <sup>2</sup> )		$\alpha_0$ (度)	
1#	精确解	114.86		-27.49		26.10	
	组号	实验解	最小二乘解	实验解	最小二乘解	实验解	最小二乘解
	1	110.20	111.32	-24.92	-25.84	26.37	26.20
	2	111.07	112.24	-27.25	-27.37	26.28	26.11
3	109.20	110.17	-26.85	-27.88	26.12	26.08	
2#	精确解	133.76		-31.55		25.50	
	组号	实验解	最小二乘解	实验解	最小二乘解	实验解	最小二乘解
	1	134.33	135.42	-28.45	-29.33	25.71	25.66
	2	135.19	136.31	-30.78	-31.76	25.65	25.54
3	135.87	137.19	-29.99	-30.97	25.47	25.49	
3#	精确解	116.85		-29.49		26.70	
	组号	实验解	最小二乘解	实验解	最小二乘解	实验解	最小二乘解
	1	112.39	113.51	-25.19	-26.21	26.93	26.86
	2	113.51	114.62	-25.27	-25.29	26.94	26.89
3	114.16	115.28	-24.46	-24.57	26.72	26.70	

说明 其中实验解一栏是通过公式(3)、(4)计算的,最小二乘解一栏是考虑了约束条件:  $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x_0} - \varepsilon_{y_0}$ , 后使(2)构成超定方程组,通过公式(8)、(9)及求 $[\sigma]$ 特征值及特征向量求得的。从结果上来看,“带约束的最小二乘解”更接近于精确解。

中,会有相同的效果。这时关系矩阵 $[A]$ 变为长方形矩阵,(2)变为超定方程组,然后使用公式(8)求解。

为了检验方法的正确性与实用性,我们进行了实测及数据处理。试件是一薄壁圆筒,它的一端固定于支架,另一端固定一个加力拐臂,臂的自由端悬挂法码。测量点处于弯扭组合的平面应力状态。使用 $45^\circ$ 应变花作为应变测量传感元件。原始数据略。

计算结果见表 1。

### 3. 结论

综上所述,我们认为带约束条件的最小二乘法用于处理应变网络的数据,可以提高其处理精度,是一种有一定应用价值的方法。

由于对此问题所作的探讨和研究分析是初

步的,有的问题还需作进一步的研究。如应变网络中的每个应变片的测量精度是不等的,因此我们对其测量值的信任程度亦是不同的。精度较高的测量值应在计算中占有较大的比重,也就是说要考虑加权问题。

### 参 考 资 料

- [1] Sanford, R. J. and Dally, J.W., A General Method for determining Mixed Mode Stress intensity Factor Isochromatic Fringe Patterns, Eng Fract, Mech (1), 4(1979).
- [2] Dally, James. W., Experimental Stress Analysis (Second edition), (1978).
- [3] 赵清澄,石源主编,实验应力分析,科学出版社(1987).
- [4] [美] J.S. 普齐米尼斯基著,王德荣等译校,矩阵结构分析理论,国防工业出版社(1975).

(本文于1990年6月24日收到修改稿)