求解多次超静定的连续梁等等．科学技术的迅速发展，对传统的力学课程也提出了新的要求，力学计算问题将会面目一新．

弹性力学问题的开尔文基本解的简单推导法

徐　汉　忠

（南京河海大学，力学系）

弹性力学问题中有名的开尔文解为无限大平面区域或无限大空间区域中在原点作用单位集中力的解答．边界元法中将开尔文解作为基本解，由此，该解答的作用日益增加，以及越来越多的人们要接触到该解答，然而该解答的推导较为繁锁，使多数边界元工作者局限于该解答的应用而不去追求该解答的推导．本文将单位集中力用 Dirac Delta 函数表示成体力分量，然后采用伽辽金位移函数求解开尔文问题，这样做不但求解变得十分简单，而且还能建立弹性力学平面问题应力函数的基本解、薄板弯曲问题的基本解和开尔文基本解的联系．

1．重调和方程的基本解

重调和方程的基本解为方程

$$\nabla^4 F+\delta(r)=0 \tag{1}$$

的任一特解．其中 r 在二维和三维问题中均为任一点 P（r 的原点）至另一点 Q 的距离；$\delta(r)$ 为 Dirac Delta 函数．因为我们欲求（1）的任一特解，而（1）中 $\delta(r)$ 关于 P 点极对称，因此（1）中的双调和算子对三维问题可取为球对称的算子，对二维问题取为轴对称的算子，即

$$\nabla^2=\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right) & \text{（三维）}\\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}\right) & \text{（二维）}\end{cases}$$

1.1 三维问题方程（1）的球对称形式为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)\right]+\delta(r)=0 \tag{2}$$

当 $r>0$ 时，$\delta(r)=0$，上式为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)\right]=0$$

上式积分两次和四次分别得

$$\nabla^2F=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=\frac{2B}{r} \tag{3}$$

$$F=Br \tag{4}$$

其中 B 为积分常数，另一些积分常数已取为零．设以 P 点为圆心无穷小长度 ε 为半径的小圆球区域为 V_ε，球表面为 S_ε，在 V_ε 内对（1）两边积分得

$$\int_{V_\varepsilon}\nabla^4F+1=0$$

由奥高公式，上式成

$$\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n}(\nabla^2F)ds+1=0$$

（3）代入上式，注意到

$$\frac{\partial}{\partial n}(\nabla^2F)=\frac{2B}{-\varepsilon^2}$$

球表面积为 $4\pi\varepsilon^2$，解得 $B=1/8\pi$，所以三维重调和方程的基本解为

$$F=\frac{1}{8\pi}r \tag{5}$$

2.2 二维问题方程（1）的轴对称形式为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)\right]+\delta(r)=0 \tag{6}$$

上方程的任一特解即二维重调和方程的基本解可取为

$$F=-\frac{1}{8\pi}r^2\ln r \tag{7}$$

2．弹性力学问题的位移函数

三维弹性力学问题和平面应变问题用位移表示的平衡微分方程为

$$G\left(\frac{1}{1-2\mu}u_{j,ji}+u_{i,jj}\right)+x_i=0 \tag{8}$$

其中 u_i 为位移；x_i 为体力；μ 为泊松比；G 为剪切弹性模量．上方程的通解能用位移函数 ψ_i 表示为

$$u_i=\frac{1}{2G}\left[2(1-\mu)\psi_{i,jj}-\psi_{j,ji}\right] \tag{9}$$

而位移函数 ψ_i 应满足的方程为

$$\nabla^4\psi_i+\frac{1}{1-\mu}x_i=0 \tag{10}$$

由（9）的位移可求得应力为

$$\sigma_{ij}=(1-\mu)(\psi_{i,kkj}+\psi_{j,kki})-\psi_{k,kij}+\mu\psi_{k,kmm}\delta_{ij} \tag{11}$$

其中 δ_{ij} 在 $i=j$ 时为 1，在 $i\neq j$ 时为零．

对任何弹性力学问题，只要能找到恰当的位移函数 ψ_{i}，使得由（9）给出的位移和由（11）给出的应力满足给定的边界条件，就得到该问题的解．

3．三维弹性力学问题的开尔文解

先讨论无限大三维区域 P 点（ξ_1,ξ_2,ξ_3）沿 x_1 方

向作用单位集中力的情况。此时 x_1 和 x_2 方向的体力 $x_1 = x_2 = 0$，而 x_3 方向的体力分量可表示为

$$x_3 = \delta(r) \tag{12}$$

其中 r 为从 P 点到另一点 $Q(x_1, x_2, x_3)$ 的距离。由于广义函数 δ 能表示集中量的密度，所以在 P 点沿 x_3 作用单位力可视为(12)式的体力分量的作用。将式(12)代入(10)得

$$\nabla^4\psi_3 + \frac{1}{1-\mu}\delta(r) = 0 \tag{13}$$

上式和(1)比较知

$$\psi_3 = \frac{F}{1-\mu} = \frac{r}{8\pi(1-\mu)} \tag{14}$$

将 $\psi_1 = \psi_2 = 0$ 和(14)代入(9)可求得位移 u_i，代入(11)可求得应力 σ_{ij}。经过 Q 点而法线方向余弦为 n_i 的截面上的应力 T_i 可由

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

求得。它们是

$$\left.\begin{aligned}
u_i &= \frac{1}{16\pi G(1-\mu)r}\Big[(3-4\mu)\delta_{3i} \\
&\quad + \frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_i}\Big] \\
T_i &= \frac{-1}{8\pi(1-\mu)r^2}\Big\{\frac{\partial r}{\partial n(Q)}\Big[(1-2\mu)\delta_{3i} \\
&\quad + 3\frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_i}\Big] \\
&\quad - (1-2\mu)\Big[\frac{\partial r}{\partial x_3}n_i(Q) \\
&\quad - \frac{\partial r}{\partial x_i}n_3(Q)\Big]\Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

设用 ψ^*_{ik}、U^*_{ik}、T^*_{ik} 分别表示在无限域 P 点沿 x_i 方向作用单位集中力而求得的位移函数 ψ_k、在 Q 点引起的位移和经过 Q 点而法线方向余弦为 (n_1, n_2, n_3) 的截面上的应力，分别称为位移函数基本解、位移基本解和应力基本解。则(15)式的 u_i 为基本解 U^*_{3i}、T_i 为基本解 T^*_{3i}，而 $\psi_1 = \psi_2 = 0$ 和(14)可表示为

$$\psi^*_{3i} = \frac{r}{8\pi(1-\mu)}\delta_{3i} \tag{16}$$

对于无限域中 P 点沿 x_1 方向或 x_2 方向作用单位集中力的解答也能同前求得。这些解答一并可表示为

$$\left.\begin{aligned}
\psi^*_{ik} &= \frac{r}{8\pi(1-\mu)}\delta_{ik} \\
U^*_{ik} &= \frac{1}{16\pi G(1-\mu)r}\Big[(3-4\mu)\delta_{ik} \\
&\quad + \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\Big] \\
T^*_{ik} &= \frac{-1}{8\pi(1-\mu)r^2}\Big\{\frac{\partial r}{\partial n(Q)}\Big[(1-2\mu)\delta_{ik} \\
&\quad + 3\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\Big] \\
&\quad - (1-2\mu)\Big[\frac{\partial r}{\partial x_i}n_k(Q) \\
&\quad - \frac{\partial r}{\partial x_k}n_i(Q)\Big]\Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

4.平面应变问题的开尔文解

无限大平面域 P 点 (ξ_1, ξ_2) 沿 x_i 方向作用单位集中力问题，可和三维问题一样，将单位集中力用广义函数 δ 表示为体力分量，然后代入(10)得位移函数基本解 ψ^*_{ik} 所要满足的方程为

$$\nabla^4\psi^*_{ik} + \frac{\delta(r)}{1-\mu}\delta_{ik} = 0 \tag{18}$$

参照二维问题的重调和方程的基本解，可由上式得

$$\psi^*_{ik} = \frac{F}{1-\mu}\delta_{ik} = -\frac{1}{8\pi(1-\mu)}r^2\ln r\,\delta_{ik} \tag{19}$$

代入(9)得 u_k，即为 U^*_{ik}，进而可得 T^*_{ik}，它们是

$$\left.\begin{aligned}
U^*_{ik} &= \frac{1}{8\pi G(1-\mu)}\Big[-(3-4\mu)\ln r\,\delta_{ik} \\
&\quad + \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\Big] \\
T^*_{ik} &= \frac{-1}{4\pi(1-\mu)r}\Big\{\frac{\partial r}{\partial n(Q)}\Big[(1-2\mu)\delta_{ik} \\
&\quad + 2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\Big] \\
&\quad - (1-2\mu)\Big[\frac{\partial r}{\partial x_i}n_R(Q) \\
&\quad - \frac{\partial r}{\partial x_k}n_i(Q)\Big]\Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

5.比较

从以上求得的基本解可知，它们和重调和方程的基本解联系在一起。二维弹性力学问题的应力函数基本解 φ^* 即为二维重调和方程的基本解 F，

$$\varphi^* = F = -\frac{1}{8\pi}r^2\ln r$$

薄板弯曲问题的基本解 W^* 为二维重调和方程的基本解 F 除以薄板的弯曲刚度 D，

$$W^* = -\frac{F}{D} = \frac{1}{8\pi D}r^2\ln r$$

平面应变问题和三维弹性力学问题的位移函数的基本解和重调和方程基本解 F 的关系分别为式(19)和式(17)的第一式，而位移和应力基本解可由位移函数基本解求导得。可见采用位移函数求基本解能把各种基本解串通在一起。

三维开尔文解的推求可在文[1]找到，[1]讨论了在原点沿 z 方向作用单位集中力的情况，将该情况作为空间轴对称问题而采用轴对称的拉甫位移函数，由于沿 z 方向作用的单位集中力没有视为体力，因而拉甫位移函数所在满足的方程为齐次的重调和方程，设定拉甫位移函数的形式后可求得应力，$z = h$ 的无限

大平面上的应力σ_r应和单位集中力平衡，由此平衡条件可确定位移函数中的常数。本文则利用了Delta函数能表示一些集中物理量的密度的性质，将集中力化为体力密度函数，这样Galerkin位移函数ψ_i所应满足的非齐次重调和方程可取为球对称的形式，又由于基本解只需满足方程而不需满足边界条件，从而使求解十分方便。

平面形变问题的开尔文解有多种推求法。一种是设定应力函数$\varphi = Ar\ln r\cos\theta + Br\theta\sin\theta$，由应力函数可求得应力，应力中也有两个待定常数$A$和$B$，以单位力的作用点为圆心，任意长半径作圆，将该圆取为脱离体考虑力的平衡条件可确定常数B。由应力积分求位移，由位移单值条件确定常数A。该方法在给定应力函数的形式后求两个待定常数仍十分复杂。文献[2] p.117给出了另一种方法，该方法由半无限大平面表面上受集中力的解答叠加曲梁弯曲问题的解答。[3]对应力函数实行傅里叶变换，得到变换后的应力函数的通解，然后由上下两个半平面的连续条件确定常数然后进行反变换得应力函数，进而得应力和位移。

综上所述，本文的方法比其它方法都简单得多，而且能把几种基本解联系起来。

参考文献

[1] Westergaard, H. M., Theory of Eloeticity and Plaeticity, p. 134.

[2] 铁摩辛柯著，徐芝纶、吴永祯译，弹性理论，117页。

[3] 朱先奎，间接边界元法及其在坝基深层稳定分析中的应用，河海大学硕士论文(1987.3.)

连续梁的有限差分解

陈楚琳（北京印刷学院）　　陈华杰（北京冶炼厂）

1.基本理论

1.1　差分概念　由文献[1]知，对于图1所示梁的挠曲线$y = f(x)$，一阶导数和二阶导数的差分表达式为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

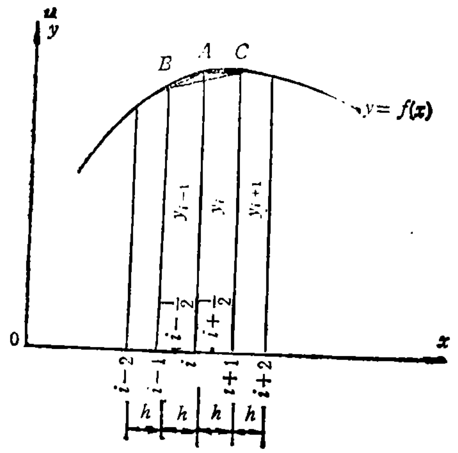

图　1

因为一阶导数等于截面转角，即

$$\theta_i \approx \left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad (1)$$

又因挠曲线近似微分方程为

$$\frac{M_i}{EI_i} \approx \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i$$

所以

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2\frac{M_i}{EI_i} = A_i \qquad (2)$$

式中

$$A_i = h^2\frac{M_i}{EI_i}$$

称为差分增量。

1.2　两端简支梁的挠度与转角公式　设图2所示简支梁两支座之间距离为l，若分成n等分，等分距离为$h = l/n$。由式(2)列出各截面的有限差分方程为

$$y_{-1} - 2y_0 + y_1 = A_0$$
$$y_0 - 2y_1 + y_2 = A_1$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = A_n$$

式中y_{-1}与y_{n+1}表示向左虚拟点-1与向右虚拟点$n+1$的虚拟挠度。

若将第二式乘$(n-1)$，加上第三式乘$(n-2)$，依此类推，直到加上倒数第二式乘1，且由边界条件$y_0 = y_n = 0$，最后可得

$$y_{-1} = -y_1 + A_0$$