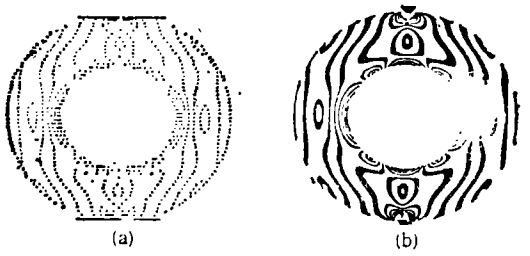

图 5 对径受压圆环应力光图

(a) 本系统打印的应力光图; (b) 光弹照片

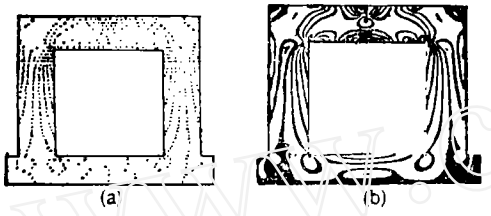

图 6 闭合刚架的应力光图

(a) 本系统打印的应力光图; (b) 光弹性照片

拍照获得的应力光图照片是吻合的(见图 5).

4.3 作用在弹性介质上的闭合刚架，上部横梁跨中承受沿厚度方向的分布载荷 $g = 37$ 千克每厘米，其应力光图见图 6.

5. 结论

本文提出的光弹性数据自动采集和分析系统，以其采集和分析迅速、可靠，结构简单，造价低廉并可用于其他光测实验而见长. 本系统中的硬件和软件具有独特的功能，能自动识别采集过程中的真伪信号，自动判别条纹级数，自动确定任意小数级等.

本系统已初步实现了光弹性实验的全自动化，是有实用价值，有发展前途的光测力学自动化系统. 当然本系统还需进一步完善，例如进一步提高分辨率，自动判别应力正负号等.

参 考 文 献

[1] Zandman, F., Photostress Analysis Product Engineering, (March 1959).

[2] Cheng, Y. F., An automatic system for scattered-light photoelasticity, *Exp. Mech.*, **9** (1969). 407—412.

[3] Gerlach H. D., Electronic aids for the automation of photoelastic measurment, Docloral Thesis, University of Karisruhe, FRG(1968).

[4] 刘全坤, Rechnergestützte bilderfassung-verax beitung und-auswertung in der spannungsoptik, 西德博士论文 (1980).

[5] Redner, S., New automatic polariscope system, *Exp. Mech.*, **14** (1974), 488—491.

[6] Robert, A., Cadoret, G., Royer, J., De'termination Ponctuelle de l'orient ation et du de'phasage d'un Birefringennt, C. R. AC. SC. Parist 283, Se'rie B(1976), 123—126.
Robert, A., Royer, J., Rotary brirefringennt and quarter-wave plates applied to photoelasticity, *Exp. Mech.*, **21** (1981), 186—194.

[7] Allison, I. M., Nurse, P., Interactive control for an automatic polariscope, *Strain*, (July 1979), 90—94.

[8] 张远鹏、张合义，光调制自动光弹性仪，北京大学鉴定会资料(1985).

[9] Carter, A. L., Obtaining stress maps from photoelastic data using a digital computer, *Exp. Mech.* **8** (1968), 122—127.

[10] Müller, R. K., Saackel, L. R., Complete automatic analysis of photoelastic fringes, *Exp. Mech.*, **19** (1979), 245—251.

[11] 韦疑男等，平面光弹性数据自动采集和计算的探讨研究，第三届全国实验应力分析学术会议论文摘要汇编(1982).

[12] 张 帆、苏明照等，GTF-181 型光弹性数字图象分析系统，国防科学技术大学鉴定会资料(1986).

(本文于 1988 年 2 月 1 日收到)

弹塑性状态下 Neuber 疲劳公式应用的局限性分析

王莱瑚　梁国炜

(西北工业大学)

提要 本文应用弹塑性有限元计算技术结果，分析了目前疲劳寿命计算中常用的局部应力-应变法之一的 Neuber 公式应用的局限性. 文章指出：随着构件应力集中部位塑性区的扩大，Neuber 公式计算的结果误差

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

也随之扩大．因此，Neuber 公式只适合于小塑性区状态．

关键词 Neuber 公式，弹塑性有限元，局部应力应变，塑性区

1. 引言

飞机及航空发动机零件的故障，常由于应力集中部位经受疲劳累积损伤而报废，近二十年来，国内外在预测零件疲劳寿命时，常用局部应力-应变法．此法比传统的 S-N 曲线估算寿命来得准确和合理．因为直接考虑零件易损处（如应力集中部位）的应力和应变值，而不是远离这部位的名义应力．在工程应用中，人们常乐于使用属于局部应力-应变法之一的 Neuber 公式计算零件的寿命[1,2]．这种方法的最大优点是计算简单．然而，Neuber 公式是一个半经验公式，在使用中有一定的局限性．本文应用弹塑性有限元计算技术，探讨缺口试件的缺口根部塑性区大小对它的影响．结果表明，随着缺口根部塑性区的扩大，使用 Neuber 公式计算结果的误差也随之增加．

2. 有限元计算技术和结果

用局部应力-应变法计算零件的疲劳寿命，目前基本有两种方法，简单的方法是Neuber法，但计算误差较大．较为精确的是使用有限元计算分析零件应力集中部位的应力-应变响应，但计算麻烦[3]．为探讨 Neuber 公式在弹塑性状态下的误差，我们使用有限元技术，在单调加载下作一验证分析．

本例采用图 1 的双侧圆角缺口受拉平板作有限元计算，平板两端作用着均匀的载荷 $\sigma_0/2$，计算的应力分量 σ_y 和应变分量 ε_y 分别示于图 2 和图 3．图上虚线为弹塑性计算结果，实线为弹性计算结果．可见，弹塑性计算结果与弹性计算结果相比在塑性区内应力增长率放慢，应变增长率加剧．塑性区的大小和形状，可根据弹塑性有限元计算详细绘出．

3. 求解 Neuber 解的方法及与有限元解的比较

Neuber 提出的半经验公式为

$$K_T^2 = K_\sigma \cdot K_\varepsilon \qquad (1)$$

其中，K_T 为理论弹性应力集中系数，K_σ 为应力集中系数，K_ε 为应变集中系数，设 σ_0、ε_0 为名义应力和名义应变，且 $\sigma_0 = E\varepsilon_0$．由于

$$K_\sigma = \sigma_{max}/\sigma_0,\quad K_\varepsilon = \varepsilon_{max}/\varepsilon_0$$

代入式(1)得

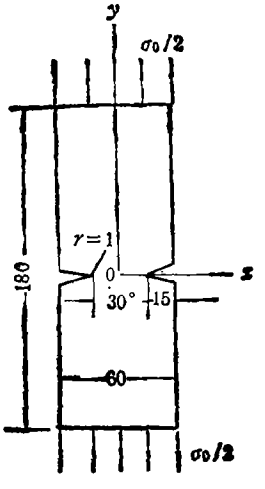

图 1 双侧圆角缺口受拉平板(板厚 2mm)

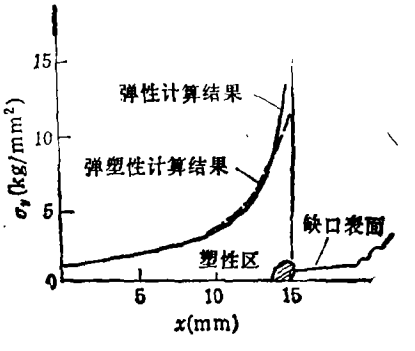

图 2 沿 x 轴应力分布

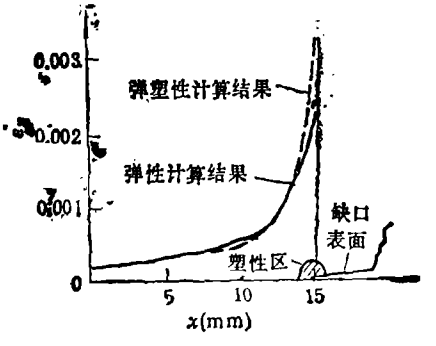

图 3 沿 x 轴应变分布

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$K_T^2 = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \cdot \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{max} \cdot \varepsilon_{max}}{\sigma_0^2} \cdot E$$

$$\sigma_{max} \cdot \varepsilon_{max} = K_T^2 \sigma_0^2 / E$$

K_T 只决定零件的几何形状，在给定的 σ_0 值下，$K_T^2 \cdot \sigma_0^2 / E$ 便为常数 c，故可写成：

$$\sigma_{max} \cdot \varepsilon_{max} = K_T^2 \sigma_0^2 / E = c \qquad (2)$$

此处 c 称 Neuber 常数，等式(2)称 Neuber 公式，它的工程实用意义在于：受载荷的零件利用它的名义应力或应变(弹性状态)可推断出局部的应力和应变(弹塑性状态)。

我们使用 Neuber 公式求解某名义应力 σ_0 下的局部应力 σ_{max} 和 ε_{max} 的步骤如下：

(1) 用与双侧圆角缺口受拉平板相同的板材(本例材料为 LY-12M) 做成拉伸试件，实验测出该板材的 σ-ε 曲线(图 4)。

(2) 使用有限元求得名义应力 σ_0 下缺口根部弹性状态下的 σ_{ymax} 值，借助公式 $K_T \doteq \sigma_{ymax}/\sigma_0$ (本例 $\sigma_{max} \doteq \sigma_{ymax}$)，求得 K_T。也可用查图册的方法，求得近似的 K_T 值[4]。

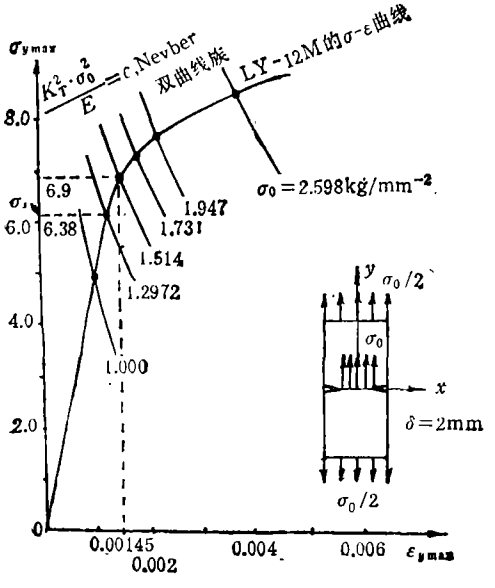

图 4 图解 Neuber 解

(3) 由式 (2) 求 Neuber 常数 c。由于 $\sigma_{max} \cdot \varepsilon_{max} = c$，故在 σ-ε 为坐标的图上为一双曲线(图 4)，与 σ-ε 曲线相交得交点，该点的 σ、ε 值即为 Neuber 解。如在 $\sigma_0 = 1.514$ kg/mm² 时，交点的 $\sigma_{ymax} = 6.90$kg/mm²，

表 1 Neuber 解和有限元解比较结果

① 状态	② 名义应力 σ_0(kg/mm²)	③ 塑性区大小 A%	③ 加载系数 L	④ 有限元解 $\sigma_{y,max}$(kg/mm²)	⑤ 有限元解 $\varepsilon_{y,max}$	⑥ 有限元求得 Neuber 常数 $\sigma_{y,max} \cdot \varepsilon_{y,max}$	⑦ Neuber 公式求得 Neuber 常数 $K_T^2 \cdot \sigma_0^2 / E = c$	⑧ Neuber 解 $\sigma_{y,max}$	⑨ Neuber 解 $\varepsilon_{y,max}$	⑩ 误差 E_ε%	⑪ 误差 E_σ%	⑫ 误差 E_c%
弹性状态	1.000,000	0.000	0.770,837	4.921,774	0.000871419	0.00428892	0.00428875	4.9216	0.0008714	−0.00415	−0.00214	−0.00207
屈服状态	1.297,291	0.000	1.000,000	6.384,973	0.001,1304	0.0072150	0.0072207	6.39	0.00113	−0.00079	0.0007873	−0.0003538
弹塑性状态	1.514,208	1.500	1.168385	6.724494	0.00148520	0.00998725	0.00983335	6.90	0.00145	−1.54095	2.60994	−2.37031
	1.731099	2.000	1.336770	6.924777	0.00173926	0.0120440	0.01285209	7.35	0.00175	+6.70971	6.140602	0.617620
	1.947989	4.670	1.505155	7.153145	0.00201527	0.0144155	0.01627433	7.70	0.00210	+12.8944	7.64496	4.20430
	2.598659	15.05	2.003101	8.855740	0.00432601	0.0383100	0.02896202	8.45	0.00343	−24.4009	−4.58166	−20.7121

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\varepsilon_{ymax} = 0.00145$，

便是 Neuber 解的值．在名义应力$\sigma_0 = 1.000$、1.2972、1.514$\cdots$等时，交点的 σ_{ymax}、ε_{ymax} 值列于表 1 ⑧和⑨列．为验证和比较，弹塑性有限元解的 σ_{ymax}、ε_{ymax} 列于表 1 ④和⑤列．Neuber 法和有限元法所得的 Neuber 常数分别列于⑦和⑥列．图 5 为弹塑性有限元计算中得出的塑性区，可见，σ_0 的增加，使缺口根部塑性区不断扩大．$\sigma_0 = 2.598\text{kg/mm}^2$ 时，塑性区尺寸为 2.2575mm，用占净面积宽度之半（15mm）$A\%$ 衡量，$A\% = \frac{2.2575}{15} = 15.05\%$。

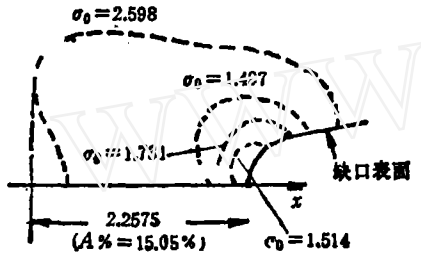

图 5　有限元计算显示的塑性区增长

4. 结论和分析

由表 1、图 4、图 5 得到如下结论：

(1)名义应力 σ_0 的增加使塑性区扩大(表 1 ③列)，Neuber常数 c 的误差 $E_c\%$(⑩列)不断增大．如用加载系数 L[5]($L=\bar{\sigma}_{max}/\sigma_s$，对本例$\bar{\sigma}_{max} \doteq \sigma_{ymax}$) 与 $E_c\%$ 的关系描述可画出图线(图 6)，可见 $|E_c|\%$ 的值随 L 线性增加，在弹性状态下，误差几乎为零．由此证明了，在弹性状态下Neuber公式是完全正确的．当 $\sigma_0 = 1.947989\text{kg/mm}^2$，加载系数 $L = 1.505155$，相应的塑性区大小 $A\%$ 为 4.67%，此时的 Neuber 常数误差 $E_c\%$ 达 12.8944%，应力误差 $E_\sigma\% = 7.64496\%$，应变误差 $E_\varepsilon\% = 4.20430\%$，Neuber 法和有限元法偏离明显，说明使用 Neuber 公式较勉强．

(2) 应力、应变值的误差，随着塑性区的增加，大致也有增加的趋势（⑪、⑫列）．同样，在弹性状态下，解的误差几乎接近于零．

本例有限元计算的准确性，导致误差的原因可能为：增量加载步长的大小和有限元的离散误差，为适应缺口根部应力、应变的剧烈变化并详细描绘塑性区尺寸，必须在根部划分较细的网格．较小的增量加载步长，使局部应变误差 $E_\varepsilon\%$ 较小．

通过本例弹塑性有限元计算和 Neuber 法两种结果，足以说明：Neuber 公式只适于应力集中部位出现小塑性区的情况．如果出现较大的塑性区，最好还是使用有限元计算，正确算出应力集中部位的应力、应变值，才能为零件的准确寿命计算打下基础．

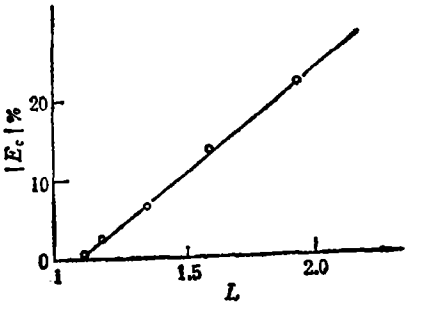

图 6　Neuber 常数误差

参 考 文 献

[1] S·Majamdar, Analysis of Low Cyclic Fatigue and Creep in Gas Tubine Engine, *J. Aircraft*, (1975).

[2] S·Tepper, Low-Cycle Fatigue of the Tubine Disk for the National Aeronatics Turbine Rig. STP612, THERMAL FATIGUE OF MATERIALS AND COMPONENTS.

[3] 伍义生，一种计算疲劳寿命的新方法—— Neuber 局部应力-应变分析法，力学与实践，2(1982)．

[4] R·E 彼德逊，设计中的应力集中系数，中国工业出版社，刘纯朴译，5(1965)．

[5] 李大潜等编，有限元素法续讲，科学出版社 (1979) p. 197.

(本文于 1988 年 1 月 18 日收到)

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net