参 考 文 献

[1] 石油院校教材编写组,《石油厂设备制造与安装》,中国工业出版社(1961).

[2] 《火管锅炉受压元件强度计算暂行规定》,劳动杂志社(1961).

[3] 《蒸汽锅炉安全监察规程》,劳动杂志社(1980).

[4] 兰州石油化工机器厂,管壳式换热器的几种胀接方法,中国机械工程学会压力容器学会论文,编号 160—80.

[5] 范钦珊,压力容器的应力分析与强度设计,原子能出版社(1979).

[6] Унксов, Е.П., Инженерная Теория Пластичности, Машгиз (1959). 中译本:塑性的工程理论,秦开宗译,科学出版社(1963).

[7] 机械设计手册,化学工业出版社(1979).

[8] 上海工业锅炉厂工业锅炉研究所编,工业锅炉质量分等规定(1980).

[9] 刘正武等编,锅炉制造工艺学,科技卫生出版社(1958).

[10] 章燕谋编,锅炉制造工艺学,机械工业出版社(1980).

(本文于 1982 年 7 月 24 日收到)

梯形板弯曲问题转换成为常微分方程解法

王 磊

(湖 南 大 学)

梯形板与等腰梯形板弯曲问题在不同边界条件下的康托洛维奇解法. 将板的位移函数用 $w(xy)=u(xy)v(y)$ 表示,用泛函及欧拉方程得到变系数常微分方程. 用无因次欧拉置换法得特征方程,用牛顿-秦九韶法解代数方程,得任意边界条件的解.

康托洛维奇近似变分法用于解板的弯曲问题,仅限于矩形板. 由于实际工程的需要,本文探讨梯形板与等腰梯形板的康氏解法. 梯形板

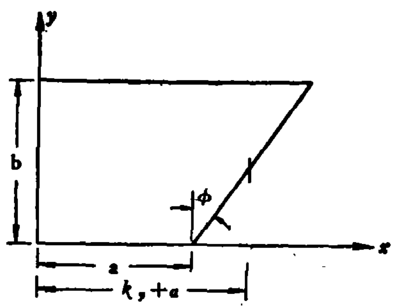


图 1

的形状,尺寸如图 1 所示,承受垂直于板面的均布荷载 q,斜边上任意一点的 x 坐标为 $ky+a$, $k=\mathrm{tg}\,\phi$. 用康氏法求板的位移,采用的一级近似位移函数为:

$$w(x, y)=u(x, y)v(y)$$

式中 x 方向的位移函数 $u(x,y)$ 采用梁函数,今按不同支承情况分别给出如下:

两边固支 $$u(xy)=x^4-2x^3(ky+a)+x^2(ky+a)^2 \qquad (1)$$

两边简支 $$u(xy)=x^4-2x^3(ky+a)+x(ky+a)^3 \qquad (2)$$

左固右简 $$u(xy)=2x^4-5x^3(ky+a)+3x^2(ky+a)^2 \qquad (3)$$

左固右自由 $$u(xy)=x^4-4x^3(ky+a)+6x^2(ky+a)^2 \qquad (4)$$

图 2 所示为等腰梯形板,y 轴为对称轴,变梁长度为 $2ky+2a$,利用对称性,在均布荷载 q 作用下,用材料力学方法推导得:两端固支:

$$[x^2-(ky+a)^2]^2 \qquad (5)$$

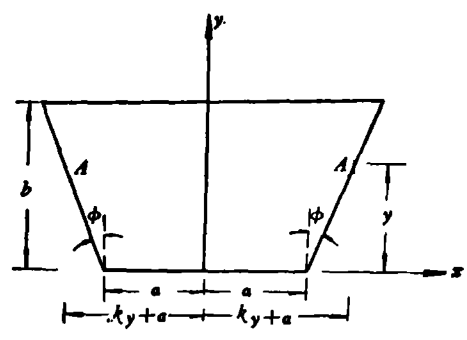


图 2

两端简支:

$$x^4-6x^2(ky+a)^2+5(ky+a)^4 \quad (6)$$

以上梁函数 $u(x,y)$ 均满足位移边界条件,应力边界条件在变分过程中自动满足. 利用以下几个公式

$$\frac{\partial w}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+uv' \quad \left(v'=\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}v' \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}v'+uv''$$

$$\left(v''=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (9)$$

如果板有自由边,其泛函为

$$\pi=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^{ky+a}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right.$$

$$\left.\underline{-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]}\right\}dxdy$$

$$-\int_0^b\int_0^{ky+a}qwdxdy \quad (10)$$

式中画直线部分去掉,即板不包含自由边的泛函. 将式(7)、(8)、(9)等有关公式代入(10)式,为

$$\pi=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^{ky+a}[(u_{xx}+u_{yy})^2v^2+4u_y^2v'^2+u^2v''^2$$

$$+4(u_{xx}+u_{yy})u_yvv'+2(u_{xx}+u_{yy})uvv''$$

$$+4u_yuv'v'']dxdy\underline{-D(1-\mu)\int_0^b\int_0^{ky+a}[(u_{xx}u_{yy}}$$

$$\underline{-u_{xy}^2)v^2+2(u_{xx}u_y-u_{xy}u_xvv'-u_x^2v'^2}$$

$$\underline{+u_{xx}uvv'')]dxdy}-\int_0^b\int_0^{ky+a}quvdxdy \quad (11)$$

同理,式中画直线部分去掉,即板不包含自由边(只有固支边及简支边)的泛函:

将(1)—(6)有关公式代入(11),并用欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial v'}+\frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial F}{\partial v''}=0 \quad (12)$$

可以得到下列四种边界条件的常微分方程:

两对边固支

$$(ky+a)^4v^{IV}+18k(ky+a)^3v'''$$
$$+(72k-24)(ky+a)^2v''$$
$$-168k(ky+a)v'+168(k^2$$
$$+3)v=21\frac{q}{D} \quad (13)$$

两对边简支

$$(ky+a)^4v^{IV}+18k(ky+a)^3v'''$$
$$+(73.1613k^2-19.7419)(ky$$
$$+a)^2v''-(8.129k^3-138.1935k)$$
$$\times(ky+a)v'-146.3226v$$
$$=4.0645\frac{q}{D} \quad (14)$$

左端固支,右端自由(取 $\mu=0.3$)

$$(ky+a)^4v^{IV}+18k(ky+a)^3v'''$$
$$+(93.7582k^2-5.7857)(ky$$
$$+a)^2v''+(152.3077k^2-40.5)$$
$$\times k(ky+a)v'+(51.9231k^4$$
$$+7.2692k^2+12.4615)v$$
$$=0.5192\frac{q}{D} \quad (15)$$

用欧拉无因次置换法

$$\left.\begin{aligned}
v&=\left(\frac{ky+a}{kb+a}\right)^n\\
v'&=n\left(\frac{k}{kb+a}\right)\left(\frac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-1}\\
v''&=n(n-1)\left(\frac{k}{kb+a}\right)^2\left(\frac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-2}\\
v'''&=n(n-1)(n-2)\left(\frac{k}{kb+a}\right)^3\\
&\quad\times\left(\frac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-3}\\
v^{IV}&=n(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{k}{kb+a}\right)^4\\
&\quad\times\left(\frac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-4}
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

将(16)代入(13)、(14)、(15)三式相应的齐次式中,可得到三种边界情况的微分方程的特征方程,取 $k=1(\phi=45°)$,用牛顿-秦九韶法解特征根.

两对边固支:

$$n^4+12n^3+5n^2-186n+672=0$$

$$n_1=-8.32+1.952 \quad n_2=-8.32-1.952$$

$n_3 = 2.32 + 1.945 \qquad n_4 = 2.32 - 1.945$

$\alpha_1 = -8.32 \qquad \beta_1 = 1.952$

$\alpha_2 = 2.32 \qquad \beta_2 = 1.945$

两对边简支:

$$n^4 + 12n^3 + 10.4194n^2 - 153.4839n - 146.3226 = 0$$

$n_1 = 3.2765$, $n_2 = -9.2765$, $n_3 = -0.9540$, $n_4 = -5.0460$

左端固支,右端自由

$$n^4 + 12n^3 + 44.9725n^2 + 53.8352n + 71.6538 = 0$$

$n_1 = -5.5577 + 1.3537$, $n_2 = -5.5577 - 1.3537$, $n_3 = -0.4423 + 1.4296$, $n_4 = -0.4423 - 1.4296$

$\alpha_1 = -5.5577 \qquad \beta_1 = 1.3537$

$\alpha_2 = -0.4423 \qquad \beta_2 = 1.4296$

以公式(13)为例,研究两种特殊情况:

$\phi = 0$ $k = \tan\phi = 0$ 即蜕化为矩形板特殊情况

$$a^4 v^{\mathrm{IV}} - 24a^2 v'' + 504v = 21\frac{q}{D} \qquad (17)$$

$a = 0$ 时,即蜕化为三角形板特殊情况

$$(ky)^4 v^{\mathrm{IV}} + 18k^4 y^3 v''' + (72k - 24)(ky)^2 v'' - 168k^2 y v' + 168(k^2 + 3)v = 21\frac{q}{D} \qquad (18)$$

两式比较,三角形板存在 v''' 及 v'. 因此,常微分方程要复杂一些.

三种边界情况下的位移方程为

两对边固支:

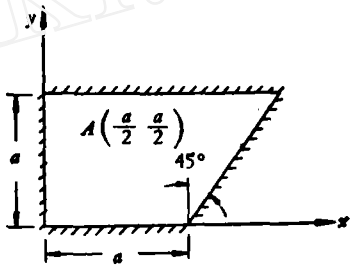
$$w(xy) = u(xy)v(y) = [x^4 = 2x^3(y+a) + x^2(y+a)^2] \cdot \left[\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{\alpha_1}\left(c_1\cos\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a} + c_2\sin\beta_1 \times \ln\frac{y+a}{b+a}\right) + \left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{\alpha_2}\left(c_3\cos\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a} + c_4\sin\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}\right) + 0.03125\frac{q}{D}\right] \qquad (19)$$

两对边简支:

$$w(xy) = u(xy)v(y) = [x^4 - 2x^3(y+a) + x(y+a)^3] \left[c_1\frac{y+a}{b+a} + c_2\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{n_2} + c_3\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{n_3} + c_4\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{n_4} - 0.02778\frac{q}{D}\right] \qquad (20)$$

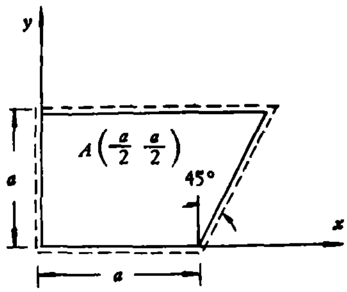
左端固支、右边自由:

$$w(xy) = u(xy)v(y) = [x^4 - 4x^3(y+a) + 6x^2(y+a)^2]\left[\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{\alpha_1}\left(c_1\cos\beta_1 \times \ln\frac{y+a}{b+a} + c_2\sin\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}\right) + \left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{\alpha_2}\left(c_3\cos\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a} + c_4\sin\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}\right) + 0.007246\frac{q}{D}\right] \qquad (21)$$



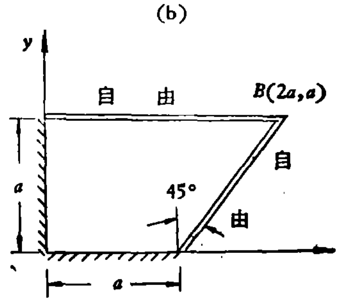
$w_A = 0.00345\dfrac{qa^4}{D}$

(a)



$w_A = 0.00769\dfrac{qa^4}{D}$

(b)



$w_B = 0.2078\dfrac{qa^4}{D}$

(c)

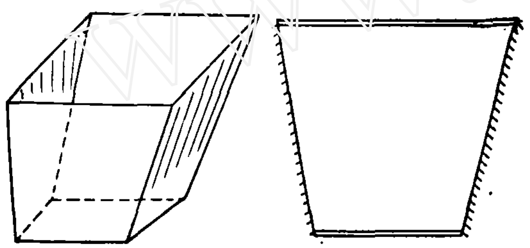
图 3

由 $y=0$、$y=b$ 边界条件，可以确定（19）、(20)、(21)三式中的四个积分常数，从而可得康氏法的近似位移函数。

用上述方法得到三种板的解详见图 3.

本文适用于梯形板，等腰梯形板、三角形板弯曲问题的解法．在任意边界条件情况下，u 函数除选定以外，v 函数可通过四个积分常数而决定．因此，计算可通过手用小型计算器可得挠度．它的实用性，一般说来，挠度精度较高，应力精度较差，但是对于研究二轮计算来说，二种计算，精度都可满意.

本文方法远比矩形板应用广泛，在生产实践中，煤与粮食漏斗、四块板在边角的转角为零情况下，可简化为两对边固支、二对边自由的等腰梯形板弯曲问题的计算.

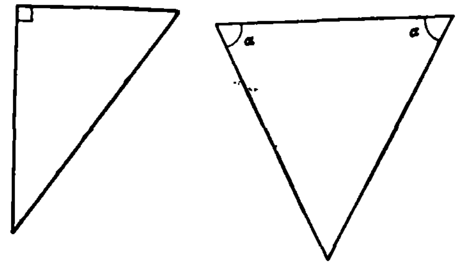


(a)　　(b)

二对边固支，二对边自由

图 4

三角形板是梯形板的特殊情况.



(a)　　(b)

图 5

图 5(a) 为梯形板的特殊情况，直角三角形板．图 5(b) 为等腰梯形板的特殊情况，等腰三角形板．用本文方法可解决各种边界条件下弯曲问题的计算问题.

本文方法无需编程序上电子计算机计算，只需用小型计算器手算，是一种经济有效的计算方法.

参考文献

[1] 钱伟长，变分法与有限元，科学出版社 (1980).
[2] 胡海昌著，弹性力学变分原理及其应用，科学出版社 (1981).
[3] 胡海昌，以弹性力学平面应力问题为例，谈对应用有限元素法的几点建议，固体力学学报，1(1981).
[4] 【美】S. 铁摩辛柯，S. 沃诺斯基著，板壳理论，板壳理论翻译组译，科学出版社 (1977).
[5] 清华大学、北京大学，计算方法上册，科学出版社(1975).

(本文于 1982 年 6 月 24 日收到)

平移桁架结构分析

胡 企 千

(中国科学院南京天文仪器厂)

（一）平移桁架及其结构特征

在精密观测和测量中，有时希望两个物体在侧向外力（如重力、风力等）作用下保持平行而无转动．例如大型天文望远镜的光学部件之间以及安装观测仪器的平台与地面之间等（图 1）．这时可采用一种特殊的结构——“平移桁架”.

在本文讨论中，我们对所讨论的杆系一律称为“桁架”，但在不同情况分别说明其连接的性质．其次，我们把平移桁架所连接的两个物