
# 动力学普遍方程的普遍性 1)
# ——分析力学札记之三十一

梅凤翔

(北京理工大学宇航学院，北京 100081)

**摘要** 理论力学中动力学普遍方程，在分析力学中称为 d'Alembert–Lagrange 原理。动力学普遍方程之普遍在于，由它不仅可导出动力学普遍定理，可导出完整约束系统和非完整约束系统的运动微分方程，还可导出积分变分原理。

**关键词** 动力学普遍方程，中心方程，运动方程，积分变分原理

**中图分类号**：O31 **文献标识码**：A doi：10.6052/1000-0879-19-333

## THE GENERALITY OF THE GENERAL EQUATIONS OF DYNAMICS1)

MEI Fengxiang

(Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** The general equations of dynamics in theoretical mechanics are referred to as the principle of d'Alembert–Lagrange in analytical mechanics. The generality of these equations lies on the fact that from these equations not only can the general theorems of dynamics be proved, but also can the differential equations of motion for systems with the holomonic or inholomonic constraints be derived, as well as the related integral functional principles.

**Key words** the general equation of dynamics, central equation, equation of motion, the integral functional principle

## 1 动力学普遍方程与中心方程

Lagrange 在其《分析力学》中提出了“动力学普遍公式”，后来发展为“动力学普遍方程”，即 d'Alembert–Lagrange 原理，从而奠定了 Lagrange 力学基础。

蒲赫哥尔茨的著名教材将动力学普遍方程表述为[1]：

“在任一瞬间，真正的运动和运动学上可能的运动不同的地方就是，只有对真正的运动来说，主动力和惯性力当力学组作任意的虚位移时所作的元功之和才等于零，亦即对真正的运动来说我们有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_i - m_i\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1}$$

这个原理提供了在每一瞬间真正运动的准绳。”

文献 [1] 没有提及动力学普遍方程对约束的前提。前提应是，约束是双面理想的。

动力学普遍方程 (1) 可表示为

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2}$$

其中，$m_i$ 为第 $i$ 个质点的质量；$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为其加速度；$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在质点上主动力的合力；$\delta\boldsymbol{r}_i$ 为其虚位移；$N$ 为质点的数目。

本文于 2019–09–09 收到。

1) 国家自然科学基金资助项目 (11272050，11572034)。

**引用格式**： 梅凤翔. 动力学普遍方程的普遍性. 力学与实践, 2020, 42(2): 209-213

Mei Fengxiang. The generality of the general equations of dynamics. *Mechanics in Engineering*, 2020, 42(2): 209-213

文献 [2] 评介了教材中有关动力学普遍方程的各种表述，并强调双面理想约束的前提不能少，只提理想约束不行，只提双面约束也不行。将原理 (2) 写成形式

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \tag{3}$$

将左端表示为

$$\begin{aligned} & m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \\ & \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i) - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot (\delta \boldsymbol{r}_i)^{\bullet} = \\ & \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i) - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{v}_i - \\ & \quad m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \left[(\delta \boldsymbol{r}_i)^{\bullet} - \delta \boldsymbol{v}_i\right] \end{aligned} \tag{4}$$

代入式 (3)，得到

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i\right) = \\ & \quad \delta T + \delta' W + \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \left[(\delta \boldsymbol{r}_i)^{\bullet} - \delta \boldsymbol{v}_i\right] \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\delta' W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \tag{6}$$

为主动力的元功之和，而 $\delta T$ 为动能的变分。式 (5) 被 Hamel G(1877—1954) 称为普遍中心方程 (die verall gemeinerte Zentralgleichung)[3]。如果利用交换关系

$$(\delta \boldsymbol{r}_i)^{\bullet} = \delta \boldsymbol{v}_i \tag{7}$$

则方程 (5) 成为 Lagrange 中心方程 [4]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i\right) = \delta T + \delta' W \tag{8}$$

引进广义坐标和广义动量，有

$$\left.\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = \sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s \\ & \delta' W = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

则 Lagrange 中心方程 (8) 成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s\right) = \delta T + \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s \tag{10}$$

Lagrange 中心方程是动力学普遍方程在利用交换关系 (7) 之后的一种形式。

如果不利用交换关系，则普遍中心方程 (5) 可在广义坐标和广义动量下写成

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s\right) = \\ & \quad \delta T + \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s + \sum_{s=1}^{n} p_s \left[(\delta q_s)^{\bullet} - \delta \dot{q}_s\right] \end{aligned} \tag{11}$$

## 2 由动力学普遍方程导出动力学普遍定理

由动力学普遍方程可导出动量定理、动量矩定理和动能定理的特殊情形。Appell 在其著作第二卷第 23 章 “d’Alembert 原理” 中写道 [5]：

(1) “如果约束允许系统每一时刻平行于某固定轴移动，那么动量在此轴投影之和对时间的导数等于给定力沿同轴的投影之和。”

“这个定理是动量投影定理的特殊情形。”“一般情形下，外力投影同时包括给定力与约束力。”“这个定理可应用于外力投影不含约束力的问题。”

(2) “如果约束允许系统每一时刻绕固定轴转动，那么对此轴动量矩之和对时间的导数等于给定力对此轴的矩之和。”“它是动量矩定理的特殊情形，仅当所有外力为给定力的情形。”

(3) “如果约束不依赖于时间，那么系统动能的微分等于给定力的元功之和”。这是动能定理的特殊情形。

Appell 著作中的给定力即主动力。

关于动能定理的特殊情形是在实位移处于虚位移之中的假设下才成立的。Appell 只提 “约束不依赖于时间” 还不够，应该是 “约束是双面理想完整，且不依赖于时间的”，因为在这样的限定下实位移才是虚位移之一。一些教材在涉及动能定理或机械能守恒定律时，要么只提 “理想约束”，如文献 [6]，要么提 “定常理想约束”，如文献 [7]。这些提法都不够严谨。

## 3 由动力学普遍方程导出运动微分方程

### 3.1 广义坐标表达

引进广义坐标，动力学普遍方程 (2) 可表示为 Euler–Lagrange 形式 [8]

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{12}$$

其中，$T$ 为系统动能，$Q_s$ 为广义力。方程 (2) 可表示为 Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s-\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}+2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0 \tag{13}$$

其中，$\dot{T}$ 为动能对时间的导数。方程 (2) 可表示为 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s-\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \tag{14}$$

其中，$S$ 为加速度能。

### 3.2　完整力学系统

对具有双面理想完整约束的系统，$\delta q_s$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 是彼此独立的，由式 (12)～式 (14) 可导出 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{15}$$

Nielsen 方程

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{16}$$

和 Appell 方程

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{17}$$

### 3.3　非完整力学系统

设系统的运动受有 $g$ 个双面理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,q,\dot{q})=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g) \tag{18}$$

约束方程 (18) 加在虚位移 $\delta q_s$ 上的限制为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g) \tag{19}$$

由式 (19)，利用 Lagrange 乘子法，由方程 (12)～(14)，分别得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{20}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{21}$$

和

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{22}$$

由方程 (12)～(14)，还可导出不带乘子的各类方程 [8]。

如果非完整约束是非 Chetaev 型的，只要给出约束对虚位移的限制条件，也可导出系统的运动微分方程。

## 4　由动力学普遍方程导出积分变分原理

### 4.1　导出 Hamilton 原理

将普遍中心方程 (11) 由 $t_0$ 至 $t_1$ 对 $t$ 积分，得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta T+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}p_s\left[(\delta q_s)^{\cdot}-\delta\dot{q}_s\right]\right\}\mathrm{d}t=\sum_{s=1}^{n}p_s\delta q_s\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{23}$$

考虑到端点条件

$$\delta q_s\left|_{t=t_0}\right.=\delta q_s\left|_{t=t_1}\right.=0\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{24}$$

得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta T+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}p_s[(\delta q_s)^{\bullet}-\delta\dot{q}_s]\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{25}$$

对完整力学系统，有

$$(\delta q_s)^{\bullet}=\delta\dot{q}_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{26}$$

代入式 (25)，得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right)\mathrm{d}t=0 \tag{27}$$

这就是完整非保守系统的 Hamilton 原理。如果力有势，即存在势能 $V$，使得

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{28}$$

代入式 (27)，得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=0 \tag{29}$$

其中

$$L=T-V$$

为系统的 Lagrange 函数。式 (29) 即有势力情形的 Hamilton 原理。

下面导出非完整系统的 Hamilton 原理。设非完整约束写成形式

$$\begin{gathered}\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\phi_\beta(t,q_s,\dot{q}_\sigma)\\(\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\\s=1,2,\cdots,n;\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\end{gathered} \tag{30}$$

对独立的变分取交换关系

$$(\delta q_\sigma)^\bullet = \delta \dot{q}_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \tag{31}$$

由

$$\delta f_\beta = 0$$

得到交换关系

$$(\delta q_{\varepsilon+\beta})^\bullet - \delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} T_\sigma^{\varepsilon+\beta} \delta q_\sigma \tag{32}$$

其中

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \phi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \phi_\beta}{\partial q_\sigma} - \sum_{\alpha=1}^{g} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\alpha}}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{33}$$

式 (31) 和式 (32) 称为 Suslov 定义 [9]。将式 (31) 和式 (32) 代入式 (25)，得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[(\delta T)_s + \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} T_\sigma^{\varepsilon+\beta} \delta q_\sigma\right] \mathrm{d}t = 0 \tag{34}$$

这就是非完整系统 Suslov 意义下的 Hamilton 原理，其中 $(\delta T)_s$ 是 Suslov 意义下的 $\delta T$。

如果对所有变分取交换关系

$$(\delta q_s)^\bullet = \delta \dot{q}_s \tag{35}$$

将式 (35) 代入式 (25)，得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[(\delta T)_{\mathrm{H}} + \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s\right] \mathrm{d}t = 0 \tag{36}$$

这就是非完整系统 Hölder 意义下的 Hamilton 原理，其中 $(\delta T)_{\mathrm{H}}$ 是 Hölder 意义下的 $\delta T$。文献 [9] 称式 (35) 为 Voronetz 定义。两种形式的 Hamilton 原理，式 (34) 和式 (36) 是等价的。

### 4.2 导出最小作用量原理

设系统所受约束是双面理想完整定常的，力是有势的，则有机械能守恒，即

$$T + V = h$$

则有

$$\delta V = -\delta T$$

以及

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s = 2T \tag{37}$$

此时中心方程 (10) 成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s\right) = \delta T - \delta V = 2\delta T \tag{38}$$

由等时变分与全变分的关系，有

$$\Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s \Delta t$$

于是有

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \Delta q_s = \sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s + \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s \Delta t = \sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s + 2T\Delta t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s \Delta q_s\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T\Delta t)$$

代入式 (38)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s \Delta q_s\right) = 2\delta T + 2\dot{T}\Delta t + 2T(\Delta t)^\bullet = 2\Delta T + 2T(\Delta t)^\bullet$$

由 $t_0$ 至 $t_1$ 对 $t$ 积分，得

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[2\Delta T + 2T(\Delta t)^\bullet\right] \mathrm{d}t = \sum_{s=1}^{n} p_s \Delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} \tag{39}$$

由端点条件

$$\Delta q_s|_{t=t_0} = \Delta q_s|_{t=t_1} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{40}$$

得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[2\Delta T + 2T(\Delta t)^\bullet\right] \mathrm{d}t = 0$$

即

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \mathrm{d}t = 0 \tag{41}$$

这就是 Lagrange 最小作用量原理 [4]。

文献 [10] 由 Hamilton 原理这样导出最小作用量原理

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \delta(2T) \mathrm{d}t$$

但这是不对的。

### 4.3 导出 Pfaff–Birkhoff 原理

令 [11]

$$L(t, \boldsymbol{a}, \dot{a}) = \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(t, \boldsymbol{a}) \dot{a}^\mu - B(t, \boldsymbol{a}) \tag{42}$$

则原理 (29) 成为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \left( \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{a}^\mu - B \right) \mathrm{d}t = 0 \tag{43}$$

这就是 Pfaff–Birkhoff 原理，它是 Birkhoff 力学的基础 [12]。

## 5 结语

Lagrange 在其著作《分析力学》中，基于虚位移原理和 d'Alembert 原理，提出了动力学普遍公式 (la forme générale de la dynamique)。动力学普遍公式后来称为动力学普遍方程，或 d'Alembert–Lagrange 原理，从而奠定了 Lagrange 力学基础。在理论力学中，动力学普遍方程主要用于推导完整系统的 Lagrange 方程，如文献 [13-15]。在分析力学中动力学普遍方程主要用于推导完整系统和非完整系统的运动微分方程，如文献 [16-19]。实际上，由动力学普遍方程还可推导出积分变分原理，如 Hamilton 原理，Lagrange 最小作用量原理，还可间接导出 Pfaff–Birkhoff 原理。这表明动力学普遍方程的普遍性，也表明它的基础性。图 1 所示为表示动力学普遍方程的基础性以及它与分析力学各分支的关联性。动力学普遍方程不仅是 Lagrange 力学的基础，也是整个分析力学的基础。

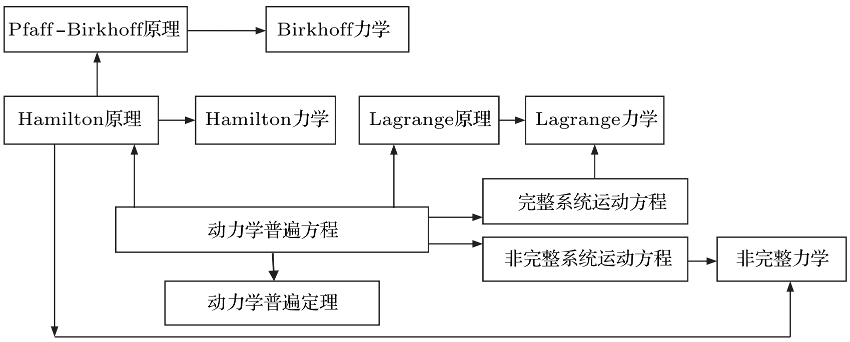


图 1　动力学普遍方程的基础性以及它与分析力学各分支的关联性

## 参 考 文 献


1 蒲赫哥尔茨 HH. 理论力学基本教程, 下册. 钱尚武, 钱敏译. 北京: 高等教育出版社, 1957

2 梅凤翔. 关于动力学普遍方程. 力学实践, 2003, 25(3): 59-60

3 Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin: Springer-Verlag, 1949

4 Лурье АИ. Аналитическая Механика. Москва: ГИФМЛ, 1961

5 Appell P. Traité de Mécanique Rationmelle. T II Ixième S, ed. Paris: Gauthier-Villars, 1953

6 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学 (I), 第 7 版. 北京：高等教育出版社, 2009

7 马尔契夫 AП. 理论力学, 第 3 版. 李俊峰译. 北京: 高等教育出版社, 2006

8 梅凤翔. 分析力学上下卷. 北京: 北京理工大学出版社, 2013

9 Новосёлов БС. Бариационны Б Механике. Ленинград: Иэдлу, 1966

10 周培源. 理论力学. 北京: 人民教育出版社, 1952; 北京: 科学出版社, 2012

11 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1983

12 梅凤翔, 史荣昌, 张永发等. Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1996

13 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学, 下册. 北京: 北京大学出版社, 1982

14 刘延柱, 杨海兴, 朱本华. 理论力学, 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2001

15 梅凤翔, 尚玫. 理论力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2012

16 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985

17 陈滨. 分析力学. 北京: 北京大学出版社, 2012

18 Papastavridis JG. Analytical Mechanics. New York: Oxford University Press, 2002

19 杰格日达 CA, 索尔塔哈诺夫 ШX, 尤士科夫 MП. 非完整系统的运动方程和力学的变分原理: 新一类控制问题. 梅凤翔译. 北京: 北京理工大学出版社, 2007


(责任编辑: 胡　漫)