

张拉整体三棱柱几何作图法找形与找力

尚仁杰¹⁾

(中冶建筑研究总院有限公司, 北京 100088)

摘要 力学和几何学是密不可分的, 本文给出了一种几何作图法进行端面平行时张拉整体三棱柱的找形方法和作图确定自平衡内力大小的找力方法, 并推导出找形后张拉整体三棱柱自平衡内力的力密度计算公式, 通过算例验证了几何作图法找形与找力的正确性。几何作图法找形和找力方法操作简单, 直观可控, 可以在 CAD 软件中实现, 甚至可以纸上手绘实现; 自平衡力密度公式简单, 表达直观, 是力密度法的一种几何实现。

关键词 张拉整体三棱柱, 找形, 找力, 力密度法, 几何作图法

中图分类号: TU394 文献标识码: A doi:10.6052/1000-0879-19-146

GEOMETRIC DRAWING METHOD FOR FORM-FINDING AND FORCE-FINDING FOR TRIANGULAR PRISM OF TENSEGRITY

SHANG Renjie¹⁾

(Central Research Institute of Building and Construction Co.Ltd. MCC Group, Beijing 100088, China)

Abstract The mechanics and the geometry are inextricably linked. A geometric drawing method can be used to find the form of a triangular prism of tensegrity structure with two parallel end faces, as well as to find the self-equilibrium forces in the triangular prism of tensegrity. The formulae for calculating the force density of self-equilibrium internal forces in triangular prism of tensegrity are derived. The geometric drawing method for form-finding and force-finding is simple in operating, intuitive and adjustable. The method can be implemented in the CAD software, and even can produce drawings on the paper. The formulae of the force density of self-equilibrium internal forces are simple and can be expressed visually. The form finding method is the geometric implementation of the force density method.

Key words triangular prism of tensegrity, form-finding, force-finding, force density method, geometric drawing method

力学和几何学是密不可分的^[1], 张拉整体结构是力学与几何学的完美结合, 张拉整体结构的找形过程是一种结构的拓扑优化过程^[2-3]。

张拉整体结构是由离散的压杆和连续的拉索(拉杆)组成的自平衡、自应力空间结构体系。自从美国著名建筑师富勒在 20 世纪 40 年代提出张拉整体结构以来, 学者们从结构找形^[2-6]、稳定性^[7-9]、几何非线性^[10-11]、自平衡内力^[12]等方面对该结构进行

了广泛研究, 但是, 可操作性强的找形方法几乎没有, 真正意义的张拉整体结构在工程中应用还极少, 多数是以建筑雕塑的形式呈现出张拉整体结构的艺术美。

张拉整体结构的特点决定了该结构体系的核心问题是找形。张拉整体结构找形总体可以分为两类: 运动学方法和静力学方法, 运动学方法的典型方法是动态松弛法^[2], 静力学方法的典型方法是力

2019-04-10 收到第 1 稿, 2019-05-15 收到修改稿。

1) 尚仁杰, 教授级高工, 主要从事预应力空间结构研究与应用。E-mail: shangrenjie@aliyun.com

引用格式: 尚仁杰. 张拉整体三棱柱几何作图法找形与找力. 力学与实践, 2019, 41(6): 718-723

Shang Renjie. Geometric drawing method for form-finding and force-finding for triangular prism of tensegrity. *Mechanics in Engineering*, 2019, 41(6): 718-723

密度法^[6]。

动态松弛法通过求解动态方程完成找形。施加预应力后体系由于没有自平衡状态而产生运动,在阻尼作用下张拉整体结构振动逐渐停止,结构稳定后形状就是找形结果,动态松弛法的缺点是经常遇到收敛变慢或难以收敛问题,设计人员的参与度低。近年来,力密度法作为拉索结构的一种找形方法已经运用到张拉整体结构中,其思想是在给定力密度因子的情况下求解结构的成形状态。力密度法是把力和形状分析结合起来的一种方法,但是,杆件的长度控制需要一定经验,不容易把握,力密度因子的初始确定比较困难,需要一定的经验,设计人员对形状的可控性差。

找形是一种非线性过程,经常是无序的,且找形过程由计算机软件来完成,缺少直观性,缺少可控性,缺少设计师的能动性,还会遇到找形过程不收敛等困难。而实际的结构找形是根据建筑师对结构造型的要求进行的,设计师要根据美学要求参与找形,目前尚缺少操作性强的实用找形方法,难以满足设计师参与找形的要求。

张拉整体三棱柱是最基本的张拉整体结构单元,每个节点有3根拉杆和1根压杆,任意1根杆件内力确定,其余3根杆件内力存在唯一内力值,许多学者都以该结构形式研究找形方法。本文根据力的平衡与几何尺寸之间的关系,提出了利用CAD作图软件进行任意形状三角形为下端面、两端面平行时张拉整体三棱柱单元找形方法,并给出了作图法确定自平衡内力的找力方法,推导了自平衡内力的力密度值,由于找形和找力都是以力的平衡为原则进行的,因此,所得到的形状自然满足预应力自平衡。本文还分析了张拉整体结构找形过程的自由性和可控性。该方法作图简单直观,可根据设计师对结构形状的要求进行找形。自平衡内力可根据力密度值计算确定,也可根据作图法直接量测内力大小。最后,通过有限元软件验证了找形方法和找力方法的正确性。

1 张拉整体三棱柱找形

1.1 端面平行张拉整体三棱柱性质

三棱柱下端面为 ABC ,上端面为 abc ,三角形 ABC 形状任意,找形就是找到自平衡的上端面三点 abc ,并使上端面 abc 与下端面 ABC 保持平行。张拉整体三棱柱有右旋(图1)和左旋(图2)两种形式,本

文以右旋为例介绍找形和找力方法,该方法同样适合于左旋形式。

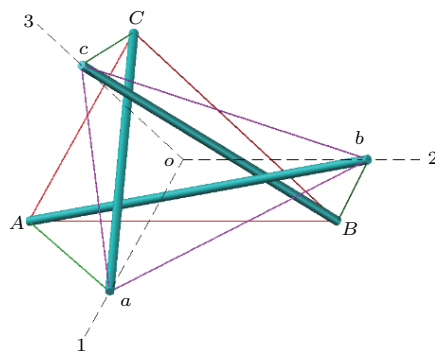


图1 右旋张拉整体三棱柱

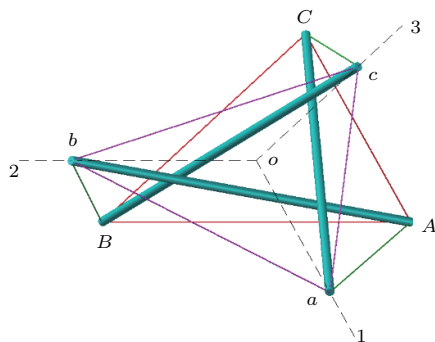


图2 左旋张拉整体三棱柱

对于节点 a ,从下端面连接到 a 的杆件有2根,一根拉杆 Aa ,一根压杆 Ca ;节点 a 在上端面有两根拉杆 ac 和 ab 。压杆 Ca 和斜拉杆 Aa 的合力一定在三角形 CAa 所在平面内,而压杆 Ca 和拉杆 Aa 在 a 点的合力又与两根拉杆 ac 和 ab 在 a 点的合力平衡,因此,该合力必定在平面 CAa 与平面 abc 的交线上。由于三棱柱上、下端面 ABC 和 abc 平行,因此,拉杆 ac 和 ab 在 a 点的合力必定在过点 a 且与 AC 平行的直线 $o1$ 上。

同理,拉杆 bc 和 ba 在 b 点的合力必定在过节点 b 且与 AB 平行的直线 $o2$ 上;拉杆 cb 和 ca 在 c 点的合力必定在过节点 c 且与 BC 平行的直线 $o3$ 上,三条合力线交于一点 o ,即 $oa \parallel CA$, $ob \parallel AB$, $oc \parallel BC$,见图1。

1.2 端面平行张拉整体三棱柱找形

根据1.1节两个端面平行时张拉整体三棱柱单元的性质,可以得到如下找形方法和步骤。

要求:任意给定形状三角形 ABC 作为张拉整体三棱柱的下端面,在离开 ABC 平面给定高度 h 的平面内确定上端面三点 a, b, c 。

(1) 在高度 h 平面内任选一点 o , 做 CA 的平行线 $o1$, AB 的平行线 $o2$, BC 的平行线 $o3$;

(2) 在 $o1$ 上任选一点 a , 使 $l_{oa} = \alpha l_{CA}$, $o2$ 上任选一点 b , 使 $l_{ob} = \beta l_{AB}$, $o3$ 上任选一点 c , 使 $l_{oc} = \gamma l_{BC}$;

(3) 连接 $ab, bc, ca, Ca, Ab, Bc, Aa, Bb, Cc$ 。

得到了满足预应力自平衡的张拉整体三棱柱, 其中 Ca, Ab 和 Bc 为压杆, 其余为拉杆。

1.3 找形的自由性

o 点的高度可以是任意的, o 点在平面内的位置也可以任意确定, 即: o 点由 3 个自由度来确定其位置, 当三棱柱高度一定时, 有 2 个自由度确定 o 点, 这些都可以根据建筑师的要求来确定。一旦 o 点位置确定, 还有 3 自由度 α, β 和 γ 来确定点 a, b, c 的位置。因此, 在下端面 ABC 确定后, 找形共有 6 个自由度, 3 个自由度确定合力点 o 的空间位置 (x, y, z) , 3 个自由度 α, β 和 γ 分别来确定 a, b, c 在直线 $o1, o2, o3$ 上的位置。

在下端面 ABC 确定后, 平行于 ABC 的上端面 3 点 a, b, c 共有 7 个自由度来定位: 1 个自由度为高度 h , h 确定后每个点 a, b, c 均有 2 个自由度确定平面位置。找形确定上端面三点 a, b, c 共有 6 个自由度, 可见, 只有 1 个约束条件来控制 a, b, c 之间的位置关系。

2 张拉整体三棱柱找力

2.1 张拉整体三棱柱自平衡力密度

对于任意一个连接节点 D 和 E 的杆件单元 DE , 其内力为 f_{DE} , 长度为 l_{DE} , 将杆件内力和长度的比值表示为 $q_{DE} = f_{DE}/l_{DE}$, 这就是力密度 (或张拉系数、预应力系数), 力密度的符号: 拉力为正, 压力为负。

如压杆 Ca 力密度为 $-k$, 也就是压力与其长度之间的比例系数 k , 即 $f_{Ca} = -kl_{Ca}$, 由于 Ca 与 Aa 在 a 点的合力在 abc 平面内, 且在直线 oa 上, 可以得到下端面与上端面连接压杆内力

$$f_{Ca} = -kl_{Ca}, f_{Ab} = -kl_{Ab}, f_{Bc} = -kl_{Bc} \quad (1)$$

下端面与上端面连接拉杆内力

$$f_{Aa} = kl_{Aa}, f_{Bb} = kl_{Bb}, f_{Cc} = kl_{Cc} \quad (2)$$

根据 a, b, c 点内力平衡, 得到矢量方程组

$$\left. \begin{aligned} f_{ab} + f_{ac} &= -(f_{aA} + f_{aC}) \\ f_{ba} + f_{bc} &= -(f_{bB} + f_{bA}) \\ f_{cb} + f_{ca} &= -(f_{cC} + f_{cB}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

求解方程组 (3) 得到内力 f_{ab}, f_{bc} 和 f_{ca} 。

根据 A, B, C 点内力平衡, 得到矢量方程组

$$\left. \begin{aligned} f_{AB} + f_{AC} &= -(f_{Aa} + f_{Ab}) \\ f_{BA} + f_{BC} &= -(f_{Bb} + f_{Bc}) \\ f_{CB} + f_{CA} &= -(f_{Cc} + f_{Ca}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

求解方程组 (4) 得到内力 f_{AB}, f_{BC} 和 f_{CA} , 最终得到 12 根杆件的力密度值:

下端面杆件

$$q_{AC} = \alpha k, q_{AB} = \beta k, q_{BC} = \gamma k \quad (5)$$

上端面杆件

$$q_{ab} = \frac{\gamma k}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \quad (6)$$

$$q_{bc} = \frac{\alpha k}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \quad (7)$$

$$q_{ca} = \frac{\beta k}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \quad (8)$$

上端面与下端面之间的连接杆件

$$q_{Aa} = k, q_{Bb} = k, q_{Cc} = k \quad (9)$$

$$q_{Ca} = -k, q_{Ab} = -k, q_{Bc} = -k \quad (10)$$

12 根杆件的力密度给出后就可以确定杆件的自平衡内力值, 其中, 参数 k 是一个比例因子, 12 根杆件内力可以按同一正比例参数放大或缩小。

2.2 作图法找自平衡内力

找形完成后得到图 1 所示张拉整体三棱柱结构, 在上、下端面平行时, 上、下端面之间的连接杆件力密度大小为同一值才能满足平衡条件, 见式 (1) 和式 (2)。假设上、下端面之间连接杆件的力密度为 1N/mm , 则杆件 Aa, Bb, Cc, Ab, Bc 和 Ca 的内力大小就是杆件长度, 即: $f_{Aa} = l_{Aa}, f_{Bb} = l_{Bb}, f_{Cc} = l_{Cc}, f_{Ab} = -l_{Ab}, f_{Bc} = -l_{Bc}, f_{Ca} = -l_{Ca}$ 。

在直线 ao 上选取点 i , 使 $l_{ai} = l_{AC}$, 在直线 bo 上选取点 j , 使 $l_{bj} = l_{BA}$, 在直线 co 上选取点 k , 使 $l_{ck} = l_{CB}$, 见图 3。

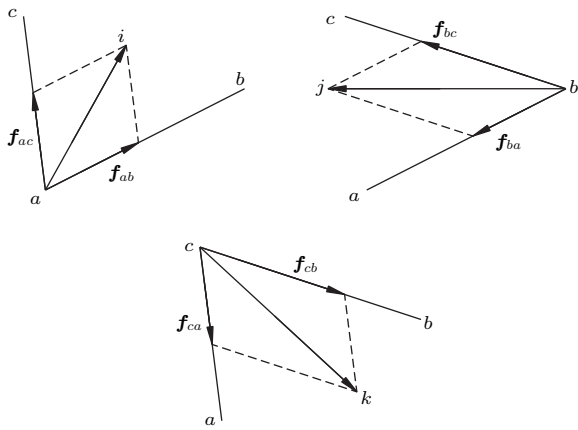


图3 张拉整体三棱柱上端面自平衡内力

将矢量 $\vec{ai}$ 在 ac 边和 ab 边上分解, 得到 ac 杆拉力 f_{ac} 和 ab 杆拉力 f_{ab} 。同理, 得到拉力 f_{bc} , f_{ba} , f_{cb} 和 f_{ca} , 三个点 a , b , c 得到的 6 个拉力相协调, 即 $f_{ab} = f_{ba}$, $f_{ac} = f_{ca}$, $f_{bc} = f_{cb}$ 。

下端面 3 条边的内力可通过相同方法量测。过 A 做 ab 的平行线与过 B 做 bc 的平行线相交于 O 点, 则 CO 平行于 ca , 见图 4。

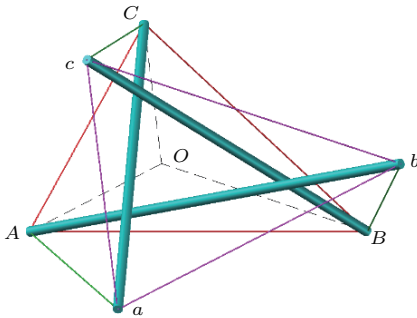


图4 张拉整体三棱柱下端面作图

在直线 AO 上选取点 I , 使 $l_{AI} = l_{ab}$; 在直线 BO 上选取点 J , 使 $l_{BJ} = l_{bc}$; 在直线 CO 上选取点 K , 使 $l_{CK} = l_{ca}$, 见图 5。将矢量 $\vec{AI}$ 在 AC 边和 AB 边上分解, 得到 AC 杆拉力 f_{AC} 和 AB 杆拉力 f_{AB} 。同理得到 f_{BA} , f_{BC} , f_{CA} 和 f_{CB} , 下端面 3 个顶点 A , B , C 得到的 6 个拉力相协调: $f_{AB} = f_{BA}$, $f_{CB} = f_{BC}$, $f_{CA} = f_{AC}$ 。

通过以上作图法, 直接从图中量测线段长度得到各杆件内力。

由于本文作图法找形与找力的过程考虑了各节点力的平衡, 因此, 作图得到的杆件内力自然满足自平衡条件。

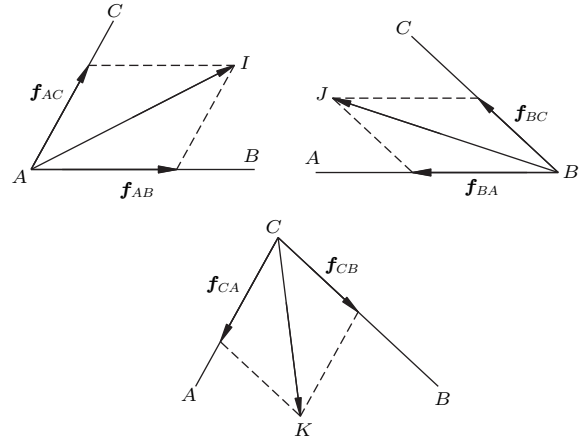


图5 张拉整体三棱柱上端面自平衡内力

3 算例

已知三棱柱下端面 ABC 的边长为 $l_{AB} = 1000 \text{ mm}$, $l_{BC} = 900 \text{ mm}$, $l_{AC} = 700 \text{ mm}$, 空间坐标为 $A(0,0,0)$, $B(1000,0,0)$, $C(340,611.882,0)$, 见图 1。

找形: 任选 o 点位置 $(500,200,1000)$, 做 $oa \parallel CA$, 取 $\alpha = 0.7$, $l_{oa} = 490 \text{ mm}$, 做 $ob \parallel AB$, 取 $\beta = 0.6$, $l_{ob} = 600 \text{ mm}$; 做 $oc \parallel BC$, 取 $\gamma = 0.5$, $l_{oc} = 450 \text{ mm}$, 得到 $a(262, -228.3176, 1000)$, $b(1100, 200, 1000)$, $c(170, 505.9412, 1000)$, 完成找形。

自平衡内力: 根据自平衡力密度公式 (6)~(10) 计算自平衡内力值。取 $k = 1 \text{ N/mm}$, 得到

$$f_{AB} = \beta k l_{AB} = 600 \text{ N},$$

$$f_{BC} = \gamma k l_{BC} = 450 \text{ N},$$

$$f_{AC} = \alpha k l_{AC} = 490 \text{ N},$$

$$f_{Ab} = -k l_{Ab} = -1500 \text{ N},$$

$$f_{Bc} = -k l_{Bc} = -1394.5883 \text{ N},$$

$$f_{Ca} = -k l_{Ca} = -1308.4419 \text{ N},$$

$$f_{Aa} = k l_{Aa} = 1058.6657 \text{ N},$$

$$f_{Bb} = k l_{Bb} = 1024.6591 \text{ N},$$

$$f_{Cc} = k l_{Cc} = 1019.8645 \text{ N},$$

$$f_{ab} = \frac{\gamma k}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} l_{ab} = 439.774 \text{ N},$$

$$f_{bc} = \frac{\alpha k}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} l_{bc} = 640.487 \text{ N},$$

$$f_{ca} = \frac{\beta k}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} l_{ca} = 414.9533 \text{ N}$$

利用作图测量法确定自平衡内力, 上、下端面之间的连接杆的力密度取为 1.0 N/mm , 这 6 根杆件的

内力就是杆件长度。从图3和图5量测得到

$$\begin{aligned} f_{ab} &= 439.774 \text{ N}, f_{bc} = 640.487 \text{ N}, \\ f_{ca} &= 414.953 \text{ N}, f_{AB} = 600 \text{ N}, \\ f_{BC} &= 450 \text{ N}, f_{AC} = 490 \text{ N}. \end{aligned}$$

将找形得到的空间位形输入ANSYS软件中进行分析。压杆 Ab, Bc, Ca 截面按 $\phi 40 \times 3$, 截面积为 348 mm^2 , 其余均为拉杆, 截面按 $\phi 8$, 截面积 50 mm^2 。将材料弹性模量调整为 $2 \times 10^8 \text{ MPa}$, 拉杆初应变调整到 $\varepsilon = 1.00577 \times 10^{-7}$ 时, 杆件 Ab 压力最大, 为 1500.0 N , 见图6; 杆件 Aa 拉力最大, 为 1058.7 N , 见图7, 而结构最大节点位移仅仅为 $0.3 \mu\text{m}$ 。

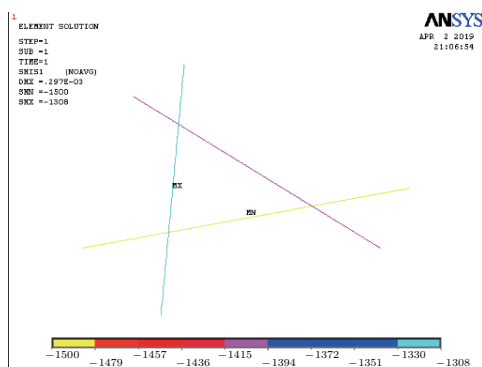


图6 张拉整体三棱柱自平衡压杆内力/N

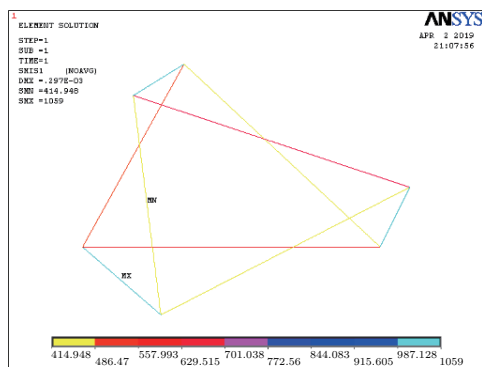


图7 张拉整体三棱柱自平衡拉杆内力/N

有限元计算的12根杆件自平衡预应力为
 $f_{AB} = 599.99 \text{ N}, f_{BC} = 449.99 \text{ N}, f_{CA} = 489.99 \text{ N},$
 $f_{ab} = 439.77 \text{ N}, f_{bc} = 640.48 \text{ N}, f_{ac} = 414.95 \text{ N},$
 $f_{Ab} = 1500.0 \text{ N}, f_{Bc} = 1394.6 \text{ N}, f_{Ca} = 1308.4 \text{ N},$
 $f_{Aa} = 1058.7 \text{ N}, f_{Bb} = 1024.7 \text{ N}, f_{Cc} = 1019.8 \text{ N}.$

有限元计算结果、力密度公式计算结果、作图法量测结果三者在前四位有效数字是一样的, 证明本文找形方法、力密度计算公式、作图量测确定自平衡内力的方法是正确性。

4 结论

基于两端面平行时张拉整体三棱柱自平衡内力与几何尺寸之间的关系, 给出了几何作图法进行找形、找力的方法、步骤, 该方法可以通过CAD软件实现, 通过算例分析, 可得以下结论:

(1) 几何作图法找形不需要计算公式, 只需要在三维CAD中作图实现, 简单直观, 便于操作, 还可以根据设计者对形状的要求自由实现。

(2) 在下端面 ABC 固定情况下, 张拉整体三棱柱找形有6个自由度, 3个自由度确定合力点 o 的位置 (x, y, z) , 三个自由度 α, β 和 γ 确定 oa, ob, oc 上的三个点 a, b, c , 三点 a, b, c 之间只有一个约束条件。

(3) 推导出了两端面平行时, 自平衡内力各杆件的力密度值。

(4) 给出了作图测量得到杆件自平衡内力的方法。

(5) 本文得到的自平衡内力可以按同一正数比例放大或缩小。

(6) 通过算例验证了几何作图法找形、找力的正确性和自平衡力密度值的正确性, 该方法得到的形状和内力自然满足张拉整体结构的预应力自平衡。

参考文献

- 武际可. 力学的几何化. 力学与实践, 2017, 39(4): 323-332
Wu Jike. Geometrization of mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(4): 323-332 (in Chinese)
- 张沛, 冯健. 约束优化理论和动力松弛技术在张拉整体结构找形分析中的联合应用. 土木工程学报, 2015, 48(7): 82-92
Zhang Pei, Feng Jian. Combined application of constrained optimization theory and dynamic relaxation technique to form finding of tensegrity structures. *China Civil Engineering Journal*, 2015, 48(7): 82-92 (in Chinese)
- 周克民. 结构拓扑优化的一些基本概念和研究方法. 力学与实践, 2018, 40(3): 245-252
Zhou Kemin. Some fundamental concepts and research method of structural topology optimization. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(3): 245-252 (in Chinese)
- 林敏, 李团结, 纪志飞. 采用改进鱼群算法的张拉整体结构找形方法. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2014, 41(5): 112-117
Lin Min, Li Tuanjie, Ji Zhifei. Form-finding of tensegrity structures based on IAFSA. *Journal of Xidian University (Natural Science Edition)*, 2014, 41(5): 112-117 (in Chinese)
- 许贤, 蔡晖映, 孙凤先等. 基于线性规划的张拉整体结构位移优化控制. 浙江大学学报(工学版), 2017, 51(11): 2093-2100
Xu Xian, Cai Yunying, Sun Fengxian, et al. Optimal displacement control of tensegrity structures based on linear

- programming. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2017, 51(11): 2093-2100 (in Chinese)
- 6 Zhang JY, Ohsaki M. Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(18-19): 5658-5673
- 7 罗阿妮, 王龙昆, 刘贺平等. 张拉整体三棱柱构型和结构稳定性分析. 哈尔滨工业大学学报, 2016, 48(7): 82-87
Luo Ani, Wang Longkun, Liu Heping, et al. Analysis of configuration and structural stability of 3-bar tensegrity prism. *Journal of Harbin Institute Technology*, 2016, 48(7): 82-87 (in Chinese)
- 8 罗尧治. 索杆张力结构几何稳定性分析. 浙江大学学报(理学版), 2000, 27(6): 608-611
Luo Yaozhi. Geometrical stability analysis of cable-strut tensile structures. *Journal of Zhejiang University (Sciences Edition)*, 2000, 27(6): 608-611 (in Chinese)
- 9 罗尧治, 陆金钰. 杆系结构可动性判定准则. 工程力学, 2006(11): 70-75
Luo Yaozhi, Lu Jinyu. New criteria for the mobility of 3-D bar structure. *Engineering Mechanics*, 2006(11): 70-75 (in Chinese)
- 10 张景耀, 大崎纯. 基于非线性分析方法以及优化技术的张拉整体结构的自由形态设计方法. 空间结构, 2015, 21(3): 92-96
Zhang Jingyao, M Ohsaki. Free-form design of tensegrity structures by combination of non-linear analysis and optimization techniques. *Spatial Structures*, 2015, 21(3): 92-96 (in Chinese)
- 11 陈志华, 刘锡良. 张拉整体三棱柱单元体结构分析. 天津大学学报, 2000, 33(1): 88-92
Chen Zhihua, Liu Xiliang. Study on tensegrity structures of triangular prism unit. *Journal of Tianjin University Science and Technology*, 2000, 33(1): 88-92 (in Chinese)
- 12 陈联盟, 袁行飞, 董石麟. 索杆张力结构自应力模态分析及预应力优化. 土木工程学报, 2006, 39(2): 11-15
Chen Lianmeng, Yuan Xingfei, Dong Shilin. Selfstress mode analysis and optimal prestress design of cable-strut tension structures. *China Civil Engineering Journal*, 2006, 39(2): 11-15 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)