

质点在斜面上的二维运动

尤明庆¹⁾

(河南理工大学能源科学与工程学院, 河南焦作 454010)

摘要 质点在斜面上受到大小恒定的下滑力和摩擦力而运动, 但后者方向随速度而变化。摩擦因子与斜面坡度比值即等效摩擦因子 $\lambda > 1$ 时质点最终在斜面上停止; $0.5 < \lambda \leq 1$ 时质点不会停止但水平方向运动距离存在限界, 而 $\lambda \leq 0.5$ 时水平方向也可运动至无穷远。相同等效摩擦因子下质点运动轨迹的曲线簇具有包络线。

关键词 斜面, 摩擦, 包络线, 光滑, 粗糙

中图分类号: O311.1 文献标识码: A doi:10.6052/1000-0879-19-037

TWO-DIMENSIONAL MOTION OF A PARTICLE ON AN INCLINED PLANE

YOU Mingqing¹⁾

(School of Energy Science and Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454010, Henan, China)

Abstract A particle on an inclined plane is under the action of a constant sliding force due to the gravity and a frictional force, with the direction of the frictional force varying with the velocity. When the ratio of the friction factor to the slope gradient of the inclined plane, i.e. the equivalent frictional factor, $\lambda > 1$, the particle will eventually stop on the slope; when $0.5 < \lambda \leq 1$, the particle will not stop but with a limit in the horizontal direction; and when $\lambda \leq 0.5$, the particle can move to an infinite distance in the horizontal direction. The curves of the particle trajectories have an outer envelope for the same equivalent friction factor.

Key words inclined plane, friction, envelope, smooth, rough

重力和摩擦力作用下物体在斜面上滑动和滚动是理论力学的基本问题之一, 在最大倾斜方向的直线运动已得到充分研究, 而斜面上的一般运动情形似尚未清晰描述^[1-4]。质点在斜面上的二维运动类似于阻力介质中的抛体运动^[5], 本文给出相关解析结果, 并借助计算机绘图展示摩擦因子和初始速度方向对质点运动特征的影响。

1 基本方程

如图 1 所示, 斜面倾角为 α ; 水平走向线为 x 轴, 而 y 轴沿斜面向上; 初始时刻质点位于坐标原点 O , 速度为 V_0 , 与 y 轴夹角 β_0 。质点的质量为 m , 与斜面

的滑动摩擦因子为 μ 。

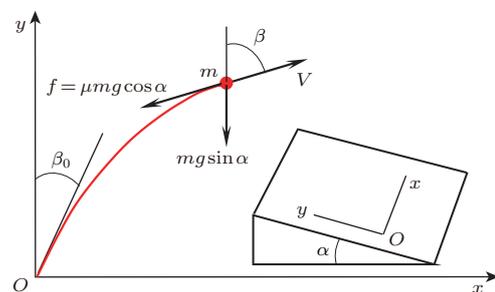


图 1 质点在倾斜平面上的受力和运动

2019-01-23 收到第 1 稿, 2019-05-08 收到修改稿。

1) E-mail: youmq@hpu.edu.cn

引用格式: 尤明庆. 质点在斜面上的二维运动. 力学与实践, 2019, 41(5): 601-606

YOU Mingqing. Two-dimensional motion of a particle on an inclined plane. *Mechanics in Engineering*, 2019, 41(5): 601-606

质点速度 V , 与 y 轴夹角 β , 滑动摩擦力 $f = \mu mg \cos \alpha$ 与速度方向相反。基于牛顿第二定律有

$$m \frac{d}{dt}(V \sin \beta) = -f \sin \beta \quad (1)$$

$$m \frac{d}{dt}(V \cos \beta) = -mg \sin \alpha - f \cos \beta \quad (2)$$

速度、时间和长度的参数分别以 V_0 , $V_0/(g \sin \alpha)$ 和 $V_0^2/(g \sin \alpha)$ 无量纲化, 且仍用原符号表示, 式(1)和式(2)可以简化为

$$(V \sin \beta)' = V' \sin \beta + V \beta' \cos \beta = -\lambda \sin \beta \quad (3)$$

$$(V \cos \beta)' = V' \cos \beta - V \beta' \sin \beta = -1 - \lambda \cos \beta \quad (4)$$

式中上标'表示对无量纲时间求导, 参数 $\lambda = \mu/\tan \alpha$ 为等效摩擦因子, 而初始速度为1。

由式(3)和式(4)可得

$$V' = -\cos \beta - \lambda \quad (5)$$

$$V \beta' = \sin \beta \quad (6)$$

求解之前先讨论 $\beta_0 = 0^\circ$ 和 180° 即直线运动的特殊情形。显然, 质点向上可达到的最高点 $Y = 1/[2(1 + \lambda)]$; 若 $\lambda \geq 1$, 则在该点停止, 否则以加速度 $(1 - \lambda)$ 向下运动。质点初始即向下, $\lambda \leq 1$ 时以加速度 $(1 - \lambda)$ 向下运动, 否则在 $Y = -1/[2(\lambda - 1)]$ 处停止。

以下假设 $0^\circ < \beta_0 < 180^\circ$ 。下滑力的作用使角度 β 单调增加(图1)。将式(6)对时间求导, 有

$$V' \beta' + V \beta'' = \beta' \cos \beta \quad (7)$$

利用式(5)和式(6)以及

$$\beta'' = \beta' \frac{d\beta'}{d\beta} \quad (8)$$

可以将式(7)变为

$$\sin \beta \frac{d\beta'}{d\beta} = (2 \cos \beta + \lambda) \beta' \quad (9)$$

记 $\eta = \cos \beta$, 积分式(9)得到

$$\ln \beta' = \ln(1 - \eta^2) + \frac{\lambda}{2} \ln \frac{1 - \eta}{1 + \eta} + C \quad (10)$$

再利用式(6)及初始条件 $V(\beta_0) = 1$, 有

$$\beta' = [\sin^2 \beta \tan^\lambda(\beta/2)]/R \quad (11)$$

$$V = R/[\sin \beta \tan^\lambda(\beta/2)] \quad (12)$$

式中参数

$$R = \sin \beta_0 \tan^\lambda(\beta_0/2) \quad (13)$$

因

$$\frac{dx}{dt} = \beta' \frac{dx}{d\beta} = V \sin \beta \quad (14)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta' \frac{dy}{d\beta} = V \cos \beta \quad (15)$$

利用式(6)有

$$\frac{dx}{d\beta} = V^2 \quad (16)$$

$$\frac{dy}{d\beta} = V^2 \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \quad (17)$$

积分式(16)和式(17)可得到以 β 为参变量的运动轨迹 (x, y) , 而 β 与时间 t 的关系可积分式(11)得到。以 z 为积分变量给出相关结果如下。

若 $\lambda = 0.5$, 则

$$x = \frac{\sin^2 \beta_0}{2} \tan\left(\frac{\beta_0}{2}\right) \left[\ln z - \frac{z^{-2}}{2} \right]_{\tan(\beta_0/2)}^{\tan(\beta/2)} \quad (18)$$

否则

$$x = \frac{R^2}{2} \left[\frac{z^{1-2\lambda}}{1-2\lambda} - \frac{z^{-1-2\lambda}}{1+2\lambda} \right]_{\tan(\beta_0/2)}^{\tan(\beta/2)} \quad (19)$$

若 $\lambda = 1$, 则

$$y = \frac{\sin^2 \beta_0}{4} \tan^2\left(\frac{\beta_0}{2}\right) \left[-\ln z - \frac{z^{-4}}{4} \right]_{\tan(\beta_0/2)}^{\tan(\beta/2)} \quad (20)$$

$$t = \frac{\sin \beta_0}{2} \tan\left(\frac{\beta_0}{2}\right) \left[\ln z - \frac{z^{-1-\lambda}}{1+\lambda} \right]_{\tan(\beta_0/2)}^{\tan(\beta/2)} \quad (21)$$

否则

$$y = \frac{R^2}{4} \left[-\frac{z^{2-2\lambda}}{2-2\lambda} - \frac{z^{-2-2\lambda}}{2+2\lambda} \right]_{\tan(\beta_0/2)}^{\tan(\beta/2)} \quad (22)$$

$$t = \frac{R}{2} \left[\frac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{z^{-1-\lambda}}{1+\lambda} \right]_{\tan(\beta_0/2)}^{\tan(\beta/2)} \quad (23)$$

上述分析表明, 质点在斜面上的运动特征仅取决于系统参数 λ 和 β_0 。下面基于等效摩擦因子 $\lambda = \mu/\tan \alpha$ 的数值具体讨论质点的平面运动。

2 质点在斜面上运动轨迹

根据质点在斜面上运动范围可将斜面的摩擦特征分为4类, 即光滑、相对光滑、相对粗糙和粗糙。

2.1 光滑 ($\lambda = 0$)

这与通常的抛体问题相同, 只是竖直向下的加速度为 $g \sin \alpha$ 。质点运动轨迹为抛物线, 在长度参数以 $V_0^2/(g \sin \alpha)$ 无量纲化时如图 2 所示。

该问题具有抛掷铅球的应用背景而得到充分讨论, 且可以初等数学解决^[6], 即不同初始速度方向的质点运动轨迹即抛物线簇具有外包络线

$$y = (1 - x^2)/2 \quad (24)$$

上式就是在竖直上抛最高点 (0, 0.5) 以速度 1 平抛的运动轨迹 (图 2)。 $\beta_0 \leq 90^\circ$ 的运动轨迹都会与其相切。

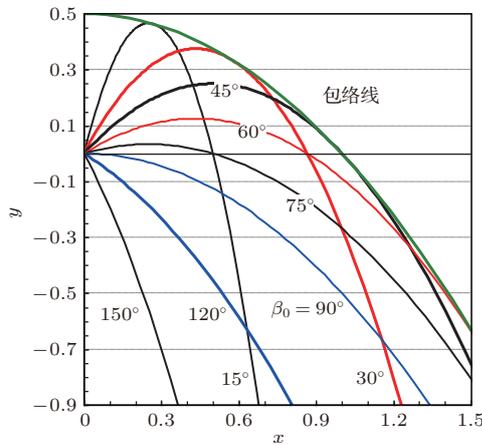


图 2 质点在光滑斜面上的运动轨迹

2.2 相对光滑 ($0 < \lambda \leq 0.5$)

图 3 给出 $\lambda = 0.25$ 和 0.5 时不同初始速度方向下质点的运动轨迹。因下滑力大于摩擦力, 质点可以永远向下运动; 而由式 (18) 和式 (19) 可知, β 趋于 180° 时 x 将增加到无限, 即使 $\lambda = 0.5$, β_0 接近 180° 时运动轨迹也可以在水平方向趋于无穷, 尽管自然对数函数趋于无穷的速度极慢。

斜面摩擦特性参数 λ 确定之后, 质点运动轨迹可以用切线角度 β 的参数方程表示, 即式 (18) 或式 (19) 和式 (22); 不同初始速度方向 β_0 的运动轨迹具有包络线, 满足条件

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} = \frac{\partial x}{\partial \beta_0} \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad (25)$$

因 x 和 y 为式 (16) 和式 (17) 在 $\beta_0 \sim \beta$ 的积分, 且 $V(\beta_0) = 1$, 有

$$\frac{\partial x}{\partial \beta_0} = kx - 1 \quad (26)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_0} = ky - \frac{\cos \beta_0}{\sin \beta_0} \quad (27)$$

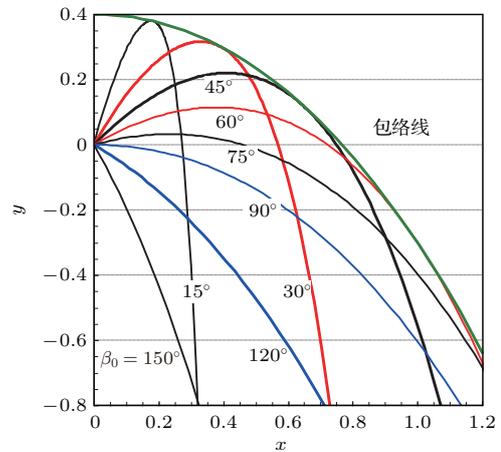
式中

$$k = \frac{1}{R^2} \frac{dR^2}{d\beta_0} = \frac{2(\lambda + \cos \beta_0)}{\sin \beta_0} \quad (28)$$

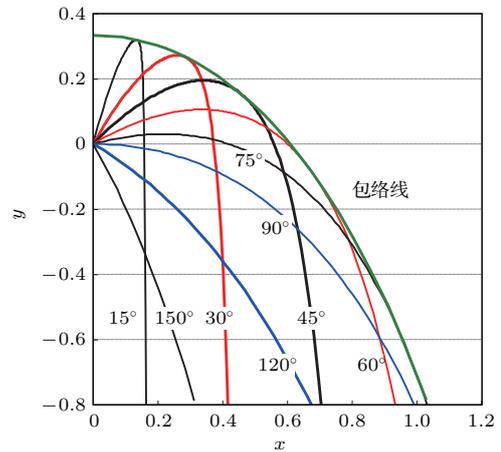
再利用式 (16) 和式 (17), 式 (25) 可以写为

$$2(y \sin \beta - x \cos \beta)(\lambda + \cos \beta_0) = \sin(\beta - \beta_0) \quad (29)$$

曲线簇满足式 (29) 的点集构成外包络线, 已在图 3 给出。由式 (29) 可以知道, $\lambda + \cos \beta_0 = 0$ 时包络线在无穷远处与运动轨迹相切, 对于更大的初始速度角 (对 $\lambda = 0$ 和 0.5 就是 β_0 大于 90° 和 120°), 运动轨迹因位置较低而不能与包络线相切。



(a) $\lambda = 0.25$



(b) $\lambda = 0.50$

图 3 质点在相对光滑斜面上的运动轨迹

包络线与运动轨迹仅在一相切, 是给定 x 下所有 y 的最大值, 也是给定 y 下所有 x 的最大值。图 4 给出包络线上各点对应的运动轨迹参数 β_0 。

从图 4 看到, 等效摩擦因子对最佳初始抛掷方向的影响与抛点和落点的高度相关, 需要具体计算

确认。落点与抛点高度相同时，达到最大抛距的 β_0 随等效摩擦因子 λ 增大而增大，即抛掷速度向水平方向靠近。在 $\lambda = 0, 0.25$ 和 0.5 时，最佳角度为 $45^\circ, 50.81^\circ$ 和 55.80° ，是逐渐增大的，相应的最大抛距为 $1.0, 0.7672$ 和 0.6101 ，是逐渐减小的。

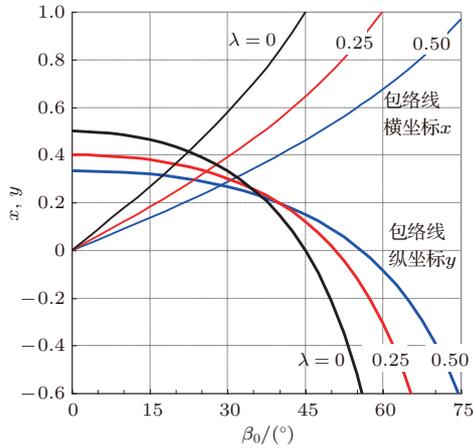


图4 摩擦特性对运动轨迹包络线的影响

2.3 相对粗糙 ($0.5 < \lambda \leq 1$)

图5给出 $\lambda = 0.75$ 和 1 时两组不同初始速度方向下质点的运动轨迹。与图2和图3相比，等效摩擦因子增大，质点水平方向的速度被更快地消耗， β_0 较小时尤为明显。利用式(29)同样可以确定曲线簇的包络线，为图面简洁起见不再绘出。

尽管下滑力不小于摩擦力，质点可永远向下运动，但式(19)表明 β 趋于 180° 时 x 具有确定的数值

$$x_M = \frac{(2\lambda - \cos \beta_0) \sin \beta_0}{(2\lambda - 1)(2\lambda + 1)} \quad (30)$$

即质点水平方向的运动范围因摩擦而受限。图6给出不同等效摩擦因子时质点在水平方向的限界。

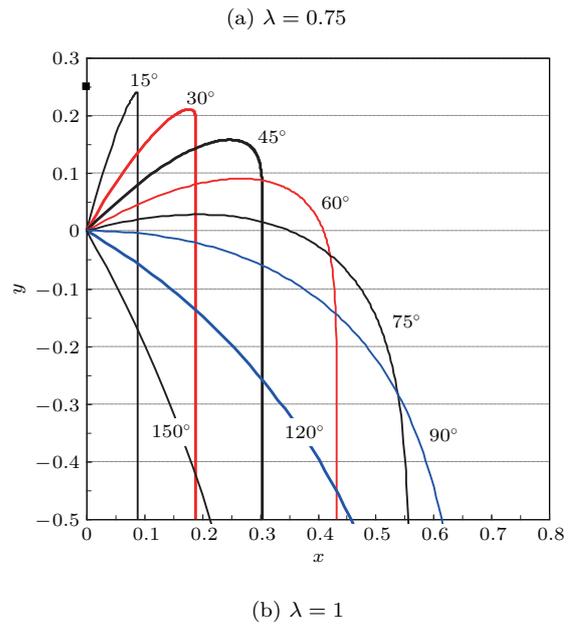
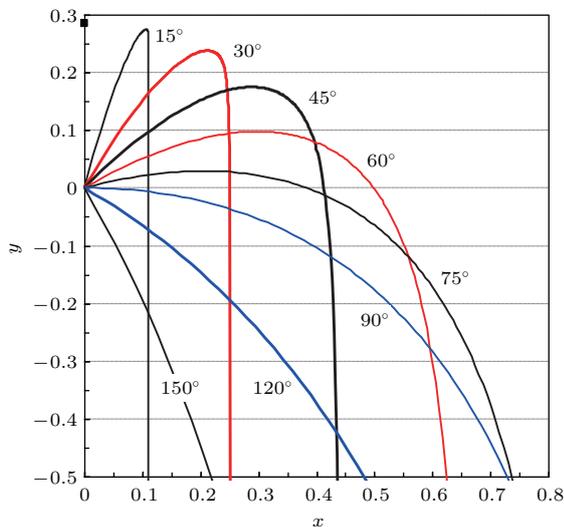


图5 质点在相对粗糙斜面上的运动轨迹

图6 质点在水平方向最大的运动距离

对式(30)进行极限分析可知，在

$$\cos \beta^* = (\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2})/2 \quad (31)$$

时质点可以在水平方向达到最远(图6)。

在 λ 接近 0.5 时，质点达到水平限界的最大值所对应的 β_0 趋于 120° 。前述 $\lambda = 0.5$ 时， $\beta_0 = 120^\circ$ 运动轨迹在无穷远处与包络线相切的结果与图6所示的趋势完全协调。

$\lambda = 1$ 时，质点向上运动即 $\beta_0 = 0^\circ$ 可以停止，其余情形最终都趋于向下的匀速运动。由式(12)确定其极限速度为 $(1 - \cos \beta_0)/2$ 。尽管下滑力等于摩擦力，但质点速度存在水平方向的分量，在转向竖直向下过程中摩擦仍耗费了部分动能。

2.4 粗糙 ($\lambda > 1$)

由于下滑力小于摩擦力, 质点最终将会在斜面上停止. 由式 (23) 可知, 质点滑动的时间为

$$T = \frac{\lambda - \cos \beta_0}{\lambda^2 - 1} \quad (32)$$

图 7 给出 $\lambda = 1.2$ 和 1.5 时两组不同初始速度方向向下质点的运动轨迹. 速度初始方向 β_0 较大时停止位置在图示区域之外.

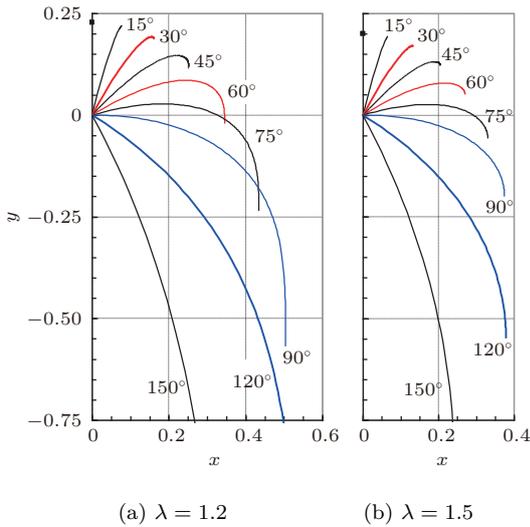


图 7 质点在粗糙斜面上的运动轨迹

质点在粗糙斜面上水平方向达到限界意味着停止, 其横坐标就是式 (30) 给出的 x_M ; 在给定等效摩擦因子时, 其随初始速度方向变化存在最大值, 相应的初始速度方向 β^* 即式 (31) 已在图 6 给出. 显然 $\beta_0 \leq \beta^*$ 的运动轨迹可以与包络线相切. 随着 λ 增加, β^* 趋于 90° , 即摩擦因子较高时速度靠近水平方向可得到较大的水平运动距离.

质点停止位置的纵坐标为

$$y_M = \frac{2\lambda \cos \beta_0 - 1 - \cos^2 \beta_0}{4(\lambda^2 - 1)} \quad (33)$$

图 8 用黑色线给出 6 个初始速度角 β_0 的停止位置, 其等效摩擦因子 λ 从 4 计算只算至 1.1, 但 β_0 达到 90° 后曲线超出图示区域; 用彩色线绘出不同等效摩擦因子 λ 的停止位置, 并用实心点标出 $\lambda = 1.05$ 时, β_0 为 $15^\circ, 30^\circ$ 和 60° 的停止位置.

质点停止的最高位置是 $y = 0.25$, 在 $\lambda = 1$ 时竖直向上时获得. 式 (30) 和式 (33) 构成的曲线簇具有包络线, 是质点可能达到的界限范围; 不过, 包络线只是与 $\lambda \leq 1.2$ 的曲线相切, 而在 $\lambda > 1.2$ 后, 停止位置随着等效摩擦因子增加而逐步收缩 (图 8).

$\lambda = 1.05$ 时停止位置的曲线在上方穿越 $\lambda = 1.1$ 和 1.2 的曲线之后, 在下方 (图 8 区域之外) 再次穿越 $\lambda = 1.2$ 和 1.1 的曲线, 最后终止于 $(0, -10)$. 又, 在 $\lambda = 1.1$ 和 1.05 时质点竖直向下运动的停止位置为 $(0, -5)$ 和 $(0, -10)$; 而向上运动的停止位置为 $(0, 0.2381)$ 和 $(0, 0.2439)$, 差异仅 0.0058 . 摩擦因子接近临界状态时, 微小变化可引起运动特征的显著变化 [7].

图 8 中 $\beta_0 = 90^\circ$ 和 $\lambda = 1.1$ 的曲线有两个交点, \circ 表示的交点并不是该摩擦因子下水平方向抛出的停止位置, 而下方图外的交点 $(0.5729, -1.19)$ 才是相应条件的停止位置.

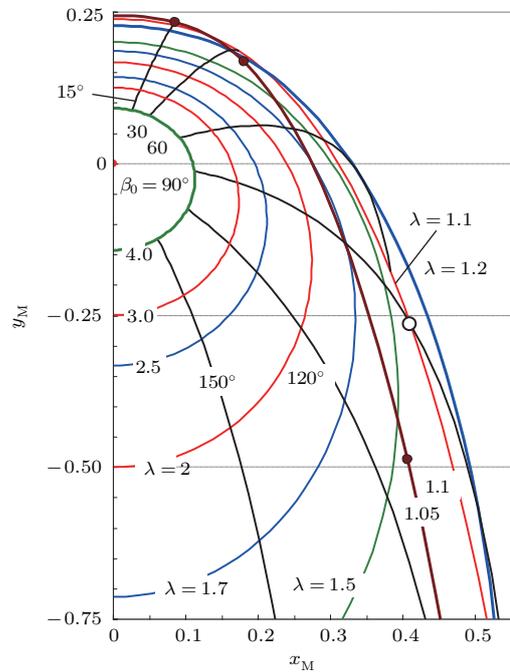


图 8 质点在粗糙斜面上的停止位置

3 结语

摩擦因子与斜面坡度比值即等效摩擦因子 λ 控制了质点在斜面上运动特征. $\lambda = 0$ 的斜面为绝对光滑, $\lambda \leq 0.5$ 时相对光滑, 质点不会停止且水平方向可以运动至无穷远; $0.5 < \lambda \leq 1$ 时相对粗糙, 质点不会停止但水平方向运动距离存在限界; $\lambda > 1$ 时质点最终在斜面上停止, 呈现粗糙特征.

初始速度偏离竖直方向的角度 β_0 是质点运动的另一控制参数. $0 \leq \lambda \leq 0.5$ 时 $\beta_0 \leq \beta^* = \arccos(-\lambda)$ 的运动轨迹具有包络线, 角度 β^* 的变化范围为 $90^\circ \sim 120^\circ$; $\lambda \geq 0.5$ 时质点水平界限小于其最大值的运动轨迹即满足 $\beta_0 \leq \beta^* =$

$\arccos[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2})/2]$ 时具有包络线, 相应的角度 β^* 为 $120^\circ \sim 90^\circ$ 。

可以模仿台球或康乐棋设计倾斜台面的击打游戏; 台面坡度若能多档调整, 则游戏的复杂程度和趣味性将显著增加。

参 考 文 献

- 1 景义林. 具有初速度的下旋球沿斜面向上的运动. 力学与实践, 2013, 35(1): 86-89
Jing Yilin. The upward movement along the slope of the backspin which has the initial velocity. *Mechanics in Engineering*, 2013, 35(1): 86-89 (in Chinese)
- 2 吴洵, 黄亦斌. 小球在粗糙斜面上的一般运动. 物理通报, 2018(5): 11-15
Wu Xun, Huang Yibin. The general motion of a ball on a rough slope. *Physical Bulletin*, 2018(5): 11-15 (in Chinese)
- 3 郑拯宇. 理论力学教学中斜坡滑动摩擦偏向力偶探讨. 科技创新导报, 2013(9): 167-168
Zheng Zhengyu. Study and analysis of the bias couple of sliding object on slope. *Science and Technology Innovation Herald*, 2013(9): 167-168 (in Chinese)
- 4 彭凡, 刘文洋, 方棋洪等. 偏心圆轮沿斜面纯滚动至连续弹跳的动力学分析. 力学与实践, 2019, 41(1): 72-75
Peng Fan, Liu Wenyang, Fang Qihong, et al. Dynamic analysis of eccentric wheels along slope from pure rolling to continuous bouncing. *Mechanics in Engineering*, 2019, 41(1): 72-75 (in Chinese)
- 5 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学. 北京: 北京大学出版社, 1983
Zhu Zhaoxuan, Zhou Qizhao, Yin Jinsheng. *Theoretical Mechanics*. Beijing: Beijing University Press, 1983 (in Chinese)
- 6 尤明庆. 对铅球最佳抛角的讨论. 力学与实践, 2013, 35(1): 67-68
You Mingqing. The optimal angle for the shot-put. *Mechanics in Engineering*, 2013, 35(1): 67-68 (in Chinese)
- 7 尤明庆. 圆柱面上滑动和滚动的分析. 力学与实践, 2017, 39(3): 290-296
You Mingqing. Study of sliding and rolling on the cylindrical surface. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(3): 290-296 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)