

有限元仿真的一堂课 ——兼说实例驱动型启发式教学法¹⁾

杨 帆²⁾ 王莉华 赵金峰

(同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要 有限元仿真课程已成为力学等专业新工科人才培养中的重要环节。本文针对该课程的特点, 提出了实例驱动型启发式的教学方法。通过对带孔方板受拉问题的教学实例的阐述, 详细介绍了实例驱动型教学方法的组成部分和实施要点, 讨论了启发式理念在该实例教学中的体现。通过同济大学的教学实践, 表明所提方法能显著提高教学效果。

关键词 有限元, 实例驱动, 启发式, 带孔方板

中图分类号: O343 文献标识码: A doi:10.6052/1000-0879-18-489

ON THE HEURISTIC AND EXAMPLE-DRIVEN TEACHING METHOD —A CASE STUDY OF FINITE ELEMENT SIMULATION COURSE¹⁾

YANG Fan²⁾ WANG Lihua ZHAO Jinfeng

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract The finite element simulation is now an important link in the engineering education for students majored in mechanics and mechanical engineering. This paper proposes a heuristic and example-driven method for teaching the finite element simulation courses. Through the practice of a teaching case of stretching a rectangular plate with a central hole, the contents and the key points of the example-driven method are illustrated in details. The incarnation of heuristics in the activities of teaching this example is discussed. Based on the teaching practice in Tongji University, the effectiveness of the proposed teaching method is demonstrated.

Key words finite element method, example-driven, heuristic, plate with hole

近年来, 有限元仿真在工业界和学术界都得到了广泛应用, 在工业界作为提高生产效率和加快研发周期的重要手段, 在学术界成为进行科学研究的重要方法。有限元仿真技能已成为新工科人才培养中不可缺少的环节。鉴于其重要性, 多数高校的力学、机械、土木、航空航天等工科专业都开设了有限元仿真应用课程。但是针对这些课程的教学研究刚刚起步, 已有的教学文献还很少。郑翔等^[1]探索了问

题式学习方法在研究生有限元课程教学中的应用。张大英^[2]将有限元学习与工程实际应用结合, 通过一个预应力混凝土的梁的分析实例阐述了有限元软件课程的课堂组织和考查方式。田和强等^[3]探讨了“翻转课堂”教学模式在有限元软件课程教学中的应用。尹飞鸿等^[4]研究了慕课方法在有限元软件课程教学中的应用。文献[5-7]强调了有限元课程教学中

2018-12-12 收到第 1 稿, 2019-04-08 收到修改稿。

1) 同济大学 2017—2018 和 2018—2019 教学改革研究与建设基金资助项目。

2) 杨帆, 副教授, 主要研究方向为固体力学。E-mail: fanyang@tongji.edu.cn

引用格式: 杨帆, 王莉华, 赵金峰. 有限元仿真的一堂课——兼说实例驱动型启发式教学法. 力学与实践. 2019, 41(4): 463-469

Yang Fan, Wang Lihua, Zhao Jinfeng. On the heuristic and example-driven teaching method—a case study of finite element simulation course. *Mechanics in Engineering*, 2019, 41(4): 463-469

理论与实践的结合,呼吁加强学生的上机训练。这些工作在教学方法、教学课件的设计、教学资源的使用等几个方面进行了有益探讨,但相关研究还不足够。

不同于传统课程,有限元仿真课程有其独特的特点,归纳起来有以下几点:(1)注重实践。有限元仿真课程的目标是培养学生运用有限元方法来解决实际工程问题的能力,这一教学目标决定了教学内容以软件应用为主,必须通过大量上机操作来实现;(2)知识结构扁平化,知识点分散。一个通用有限元软件包含大量命令,这些命令从属于不同模块,相互间联系较少,重点也不突出,形成了大量分散的知识点。传统以注入式为主的讲解方法难以取得好的教学效果;(3)较强的灵活性和开放性。每个问题都有多个不同建模方案,解题思路不唯一,甚至答案也不唯一。以上这些特点,使得有限元仿真课程的课堂组织、考核方式等教学方案不宜沿袭传统课程的模式,开展对有限元仿真课程教学方法的研究显得很有必要。

1 实例驱动型启发式教学方法介绍

实例驱动是指围绕具体实例的分析和求解来组织和开展教学活动。启发式教学法是从学生思维角度出发,引导学生主动思考,充分调动学生积极性的教学方法。实例驱动型启发式教学方法根据课程目标精选若干教学实例,将分散的知识点融合贯穿在一个个具体实例的讲解和练习中,并通过启发式教学方法来最大限度地培养学生分析问题、解决问题的能力。这其中,实例是教学载体,每节课的实例安排需要遵循以下几个原则:一是精益求精原则,所选实例要有普遍性、代表性和较强的工程应用背景,有进一步扩展空间,难度和复杂度适合在一节大课的时间内完成;二是循序渐进原则,按照从简单到复杂,从静态到动态,从线性到非线性,从单一材料到多种材料,从单调加载到多个载荷步的顺序来安排教学;三是难点分散原则,软件学习具有知识点零碎、重复性高、难点隐蔽的特点。教师在制定教学计划时应尽可能将难点平均分配到每节课的实例中,通过充分备课、提前给学生分发文件等办法突出难点,强调不同,避免重复。启发式方法是培养学生思维和动手能力的关键,启发式教学理念体现在3个层面:(1)课堂教学层面。教学过程中注意理论联系实际,引导学生回顾相关的理论知识,激发学生主动思考建模的思

路,针对问题难点恰到好处地设计课堂提问。(2)课后练习层面。通过布置开放式习题,引导学生发挥主观能动性和创新意识,在消化课堂所学的基础上,通过查阅书籍或帮助文档,进一步提高相关的操作技能。(3)课程期末考查层面。精心设计考查题目,使所考题目涵盖较多知识点,又保留有一定的自由发挥余地,同时增加题目可选性,让学生在多个题目中任选一个完成,兼顾不同学生的特点,增强考查的公平性,同时降低作弊发生的概率。

2 一个教学实例——带孔方板受拉问题的模拟

2.1 教学背景介绍

工程中经常遇到开孔板壳结构,如飞机舷窗、铆接合页等,以这类工程问题为背景,我们构造了带孔方板在拉伸载荷下的应力分析的实例。该实例应用于同济大学“工业装备虚拟仿真技术”课程的教学实践,面向工程力学和航空航天工程两个专业的学生。所需已修课程包括弹性力学、计算力学等。该实例安排在课程的第三周或第四周学习,学生前期已学习了有限元软件的基本操作和一些简单的实例,如悬臂梁弯曲问题,了解了有限元软件的建模流程。该实例的阶段学习目标为掌握ABAQUS平面问题的分析建模方法,熟悉精细化网格划分方法,并联系弹性力学知识加深对力学概念的理解。

2.2 问题的提出

本实例构型如图1所示,一个带孔矩形板受到单向拉伸载荷作用,尺寸(mm)和载荷大小参见图1中标注。结构材料为Q235结构钢,杨氏模量200 GPa,泊松比0.33,屈服应力为235 MPa。通过有限元模拟计算板面内不均匀应力分布。

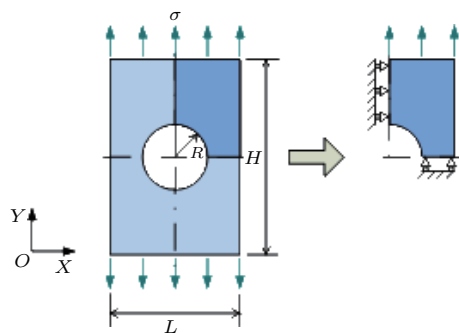


图1 带孔矩形板受拉实例的示意图

2.3 建模及求解

考虑到构型和载荷特征,将该问题作为平面应力问题来求解,采用 ABAQUS 有限元软件的 CAE 界面进行建模。遵循 ABAQUS/CAE 的主菜单中的

模块顺序,将建模流程分为 8 个步骤,而分散的知识点则有机融入在建模的具体步骤中,通过每个步骤的讲解和操练来传授和使学生体会各项仿真技能。每步的任务、主要操作和所包含的知识点参见表 1。

表 1 带孔矩形板受拉实例的具体建模步骤及知识点

步骤	任务	CAE 模块	主要操作	知识点
1	建立几何模型	Part	创建一个 2D, Deformable, Shell 特征的带孔方板部件	利用对称性缩减模型规模;形状修改技巧:相交线裁剪、尺寸控制
2	赋予材料属性	Property	创建一线弹性材料,并基于此材料创建一 Solid 类型截面,将截面赋予部件	ABAQUS 中平面问题对应 Solid 截面;平面问题和板壳问题的区别
3	创建实例和组装	Assembly	创建一个基于带孔板部件的实体	ABAQUS 实体的概念,实体和部件的关系
4	创建分析步	Step	创建一个准静态分析步	准静态分析中的时间概念;多个分析步的创建
5	添加载荷和边界条件	Load	在对称面上添加对称边界条件;在受拉边界上添加均布载荷	Pressure 和 Surface traction 的区别;边界条件和载荷在多个分析步间的传递;刚体运动约束的检查
6	划分网格	Mesh	用一阶减缩四边形单元 CPS4R 对部件划分网格离散	了解不同分网方案的区别:结构化、扫略和自由;用 Partition 工具将复杂模型分成若干简单形状;不均匀种子点布置方法
7	计算求解	Job	创建任务并提交计算	计算资源调用设置
8	结果后处理	Visualization	绘制孔边应力分布曲线;与理论解的比较	通过坐标转换显示结果;通过创建 Path 来绘制变量的空间分布

初始算例的几何参数为 $R = 5\text{ mm}$, $L = 20\text{ mm}$, $H = 30\text{ mm}$, 载荷 $\sigma_0 = 100\text{ MPa}$, 只考虑材料的线弹性属性,得到的冯·米塞斯应力云图如图 2 所示。

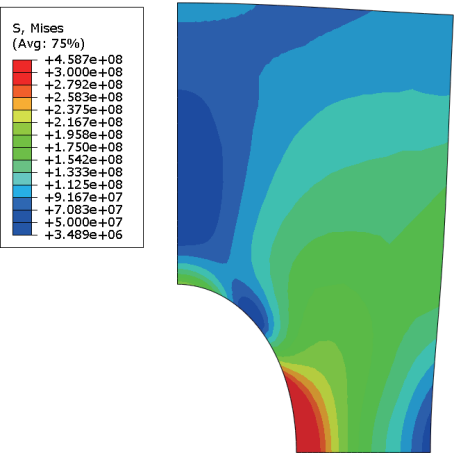


图 2 冯·米塞斯应力云图,变形放大比例 100

2.4 启发式课堂教学方案设计

按照实例的建模和求解步骤,在一些关键点设置多个可选方案,让学生通过自己思考和实践,找到正确建模思路。在这个过程中,激发学生的学习兴趣,

锻炼学生的分析能力和动手能力,并培养学生的独立思考习惯。

完整模型与 1/4 对称性模型的对比。让学生通过实际操作体会建立对称性模型的好处:节约计算资源,且不用额外施加刚体约束条件。在此基础上,进一步让学生思考含有阵列排布的多个圆孔平板的建模方法。

将孔的大小改为 1 mm,重新划分网格计算应力分布。重点讲解网格局部加密的方法:先用 Partition 切分功能在孔周围切出一个同心的扇形区域,通过对扇形区域的边界撒种子以加密孔边区域网格,并通过 Bias 选项在剩下区域设置不均匀种子,使网格从孔边到远场逐渐变疏,最后按照结构化方案来划分网格,提高网格质量。此外,通过比较查看孔周围和远场的应力分布,使学生对边界效应的影响有了直观认识,对弹性力学中的圣维南原理有更深入理解。进一步改变孔的大小,探究孔边应力集中系数随孔尺寸变化的规律,通过创建 Path 画出环向应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 沿孔边和拉应力 σ_{yy} 沿对称线的分布曲线(如图 3),与理论解进行比较。弹性力学给出的无限大板中

孔边应力的理论解为^[8]

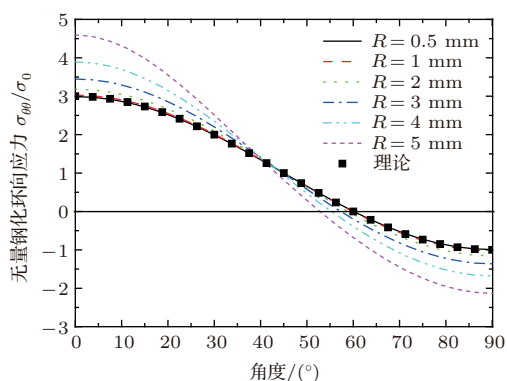
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 (1 + 2 \cos 2\theta) \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{2} \left(2 + \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \quad (2)$$

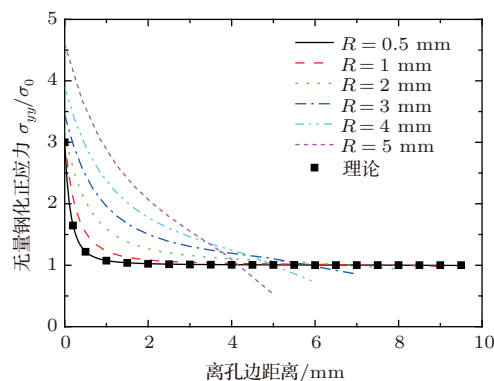
(1) 引导学生尝试不同的材料属性, 将线弹性关系改为理想弹塑性关系, 介绍非线性材料属性的设

置方法, 比较应力分布的结果(图4(a)), 通过绘制等效塑性应变等高线图确定塑性区的范围。

(2) 设置两个分析步分别模拟加载和卸载: 在第一个分析步中添加一均布类型载荷, 在第二个分析步中对该载荷进行修改, 将值改为0。引导学生学习多分析步的设置方法, 分析确定残余应力的分布(图5(b))。



(a) 孔边环向应力分布



(b) 对称线上拉应力分布

图3 不同孔径对应力分布的影响, \$\sigma_0 = 100\$ MPa

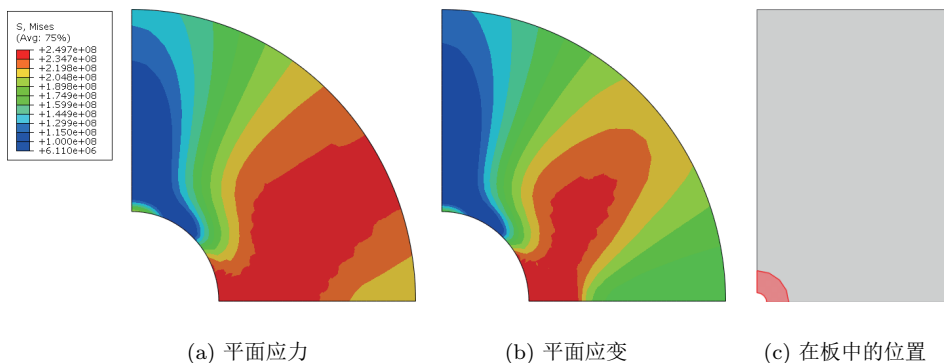


图4 孔周围的冯·米塞斯应力分布, \$R = 0.5\$ mm, \$\sigma_0 = 200\$ MPa

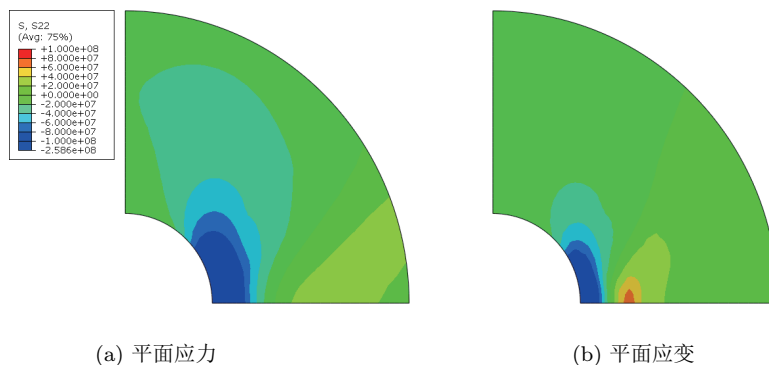


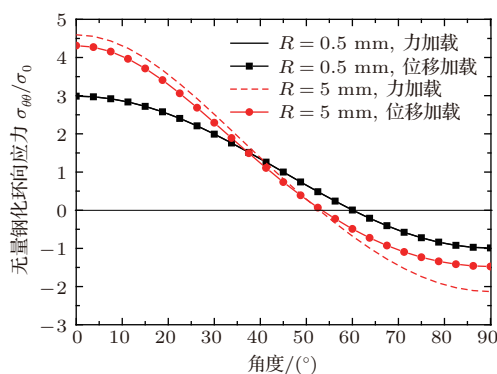
图5 卸载后的孔周围的残余应力 \$\sigma_{yy}\$ 分布, \$R = 0.5\$ mm, \$\sigma_0 = 200\$ MPa

(3) 将单元类型由ABAQUS默认的平面应力改为平面应变(在“Mesh”模块的“Element Type”中进行设置),并进一步画出冯·米塞斯应力和等效塑性应变的等高线,探究平面应力和平面应变两种条件下的应力分布(图4和图5)和塑性区大小的不同。

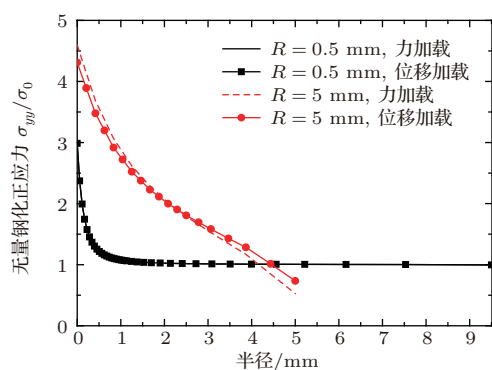
2.5 启发式课后习题设计

在时间允许情况下,可以通过精心设计的习题布置,进一步延伸拓展基于该实例的启发式教学活动,引导学生对以下问题进行讨论:

(1) 探讨加载方式的影响。比较力加载和位移加载两种加载方案。在力加载方案里对边界施加均布载荷,在位移加载方案里对边界施加一等值位移,并使约束反力的合力等于力加载方案。比较两种方案导致的变形和应力分布(图6)有何不同。



(a) 孔边环向应力分布

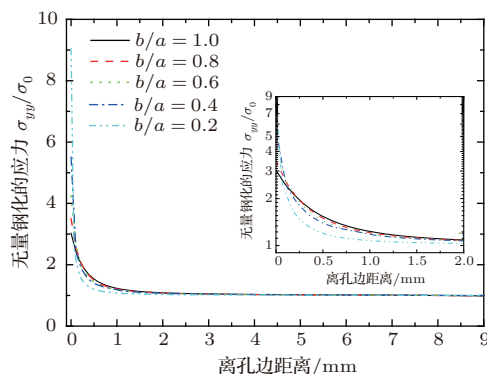


(b) 对称线上拉应力分布

图6 加载方式对应力分布的影响, $\sigma_0 = 100$ MPa

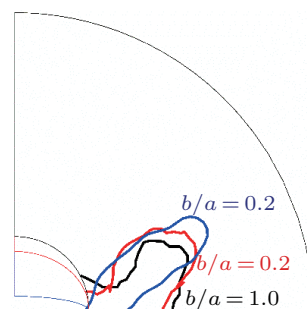
(2) 探讨孔形状的影响。将圆形孔改为椭圆形孔,固定椭圆孔长轴 a 与圆孔直径相等,不断减小短轴长度 b 。先采用线弹性材料模型,比较不同形状孔对应的应力分布曲线(图7(a)),查看孔端应力集中系数随孔几何比例 b/a 减小而发生的改变,从而

帮助学生理解裂纹尖端应力的奇异性。再采用理想弹塑性材料模型,查看不同 b/a 下的塑性区大小(图7(b))。



(a) 采用线弹性材料模型时对称线上拉应力分布,

$\sigma_0 = 100$ MPa



(b) 采用理想弹塑性材料模型时塑性区范围,

$\sigma_0 = 180$ MPa

图7 孔形状对应力分布的影响

(3) 探讨远场应力状态的影响。将板边界上的载荷由单向拉伸改为剪切,相应地,在建立1/4模型时需将对称轴上的对称边界条件改为反对称边界条件,计算应力分布,确定孔边最大应力位置。进一步,将板边界上的载荷改为更一般的拉剪混合,改变拉应力和剪应力的比例,查看孔边应力分布随之发生的改变。

2.6 讨论

启发式教学法不是某一种具体的教学模式,而是一系列从学生角度出发而设计的适合学生心理、符合人类认知规律和思维方式的教学方法体系,是一种授人以渔、鼓励创新的教学理念。在以上实例的课题教学和课后习题的组织中,启发式理念体现在以下几个方面:

(1) 投石问路

鼓励学生对没有把握的操作和方法进行主动探索。比如：对初始的孔径 10 mm 的模型，采用一阶 CPS4R 单元和默认的网格密度即可得到较为准确的孔边应力分布 (图 8(a))。当把孔径改为 1 mm 时，先让学生自己练习。大多数学生仍然采用默认网格划分方案 (图 8(b))，查看计算结果，最大应力与精确解^[9] 301 MPa 间的误差达到 49.5%，说明默认的网格划分方案已不再可行。遂鼓励学生思考解决办

法，在学生通过摸索已有部分成效时，再传授学生正确的精细化网格划分方法 (图 8(c))，再次比较结果，误差降为 11%。进一步将单元换为二阶单元 CPS8R，则误差可以进一步下降为 0.7%。通过这个过程，让学生对网格划分所应遵循的原则有了深入理解。再比如：施加均布载荷时，应选择“Pressure”类型还是“Surface traction”类型，每个学生选择不一样。最终实践证明，对本例载荷垂直于表面情况，两种类型的选择都能得到正确结果。

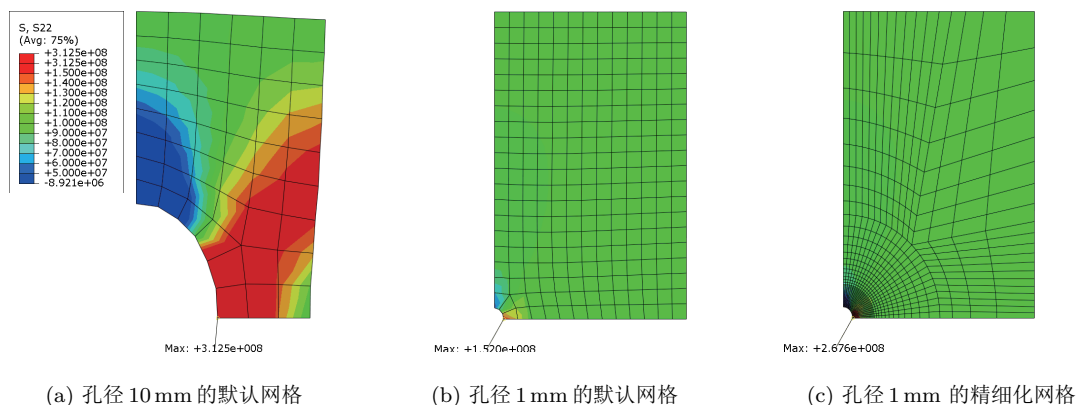


图 8 不同网格划分方案及所得到的 σ_{yy} 应力分布

(2) 欲擒故纵

有时候教师故意出错，反而能起到加深学生印象的作用。比如：在创建一个完整带孔模型时，示意图中只有载荷边界条件，很容易漏加刚体位移约束条件，这样提交计算时软件会报错，当把刚体位移约束条件加上后，模型就能够顺利求解。再比如：施加均布载荷时，不少学生选择“Surface traction”类型载荷，把大小、方向等参数都正确设好后，却总是得不到正确结果。仔细检查发现原来有个易忽略的“Traction”选项，需要把该选项从默认的“Shear”改成“General”后，载荷才能正确施加上去。通过这种“曲折”的教学过程，学生对各种易错之处有了深刻印象，避免再犯类似错误。

(3) 举一反三

引导学生将学到的技能应用在相似问题的解决中。比如：讲授完利用对称性边界将原模型简化为 1/4 对称性模型后，引导学生思考对于含有阵列排列的圆孔的平板，如何利用对称性建模。通过对称性，可以只取一个 1/4 代表性胞元来建模，胞元的左、下两个边界设置对称性边界条件，而右、上边界在原模型中虽然也是对称面，但在胞元变形过程中，这两个

边界位移并不为零，该如何设置边界条件呢？通过与学生的讨论，确定右、上边界的正向位移处处相等的特征，再以上边界为例讲授 ABAQUS 软件中施加线性约束的方法 (图 9)：利用“Equation”命令约束上边界各节点的 u_y 自由度使之与节点 A 的 u_y 相等，将上边界载荷整体施加在节点 A 上，然后让学生举一反三完成右边界的处理。

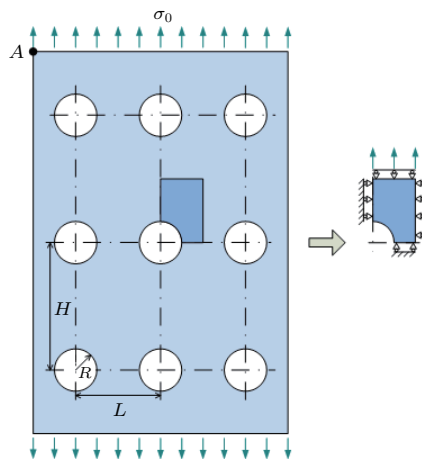


图 9 含有阵列排列的圆孔的平板受拉示意图

(4) 循序渐进

由浅入深地安排教学内容,层层递进地进行知识点传授,避免平铺直叙。从线弹性材料属性到非线性的弹塑性材料属性,从单调加载的单分析步问题到包含加载和卸载的多分析步问题,从均匀网格划分方案到局部加密的网格划分方案,从简单圆形孔到有一定难度的椭圆形孔,从单轴拉伸到多轴加载。整个教学过程符合人们认知规律,使学生在这个过程中享受到探索的快乐和求知欲的满足,从而调动起学生学习积极性和主动性,明显提高了教学效果,并且教师可以根据学生掌握情况灵活控制教学内容的广度和深度。

3 总结

本文基于同济大学“工业装备虚拟仿真技术”课程的教学实践,研究了实例驱动型启发式教学方法在有限元仿真课程中的应用。通过对带孔方板受拉变形例子的介绍,详细阐述了实例驱动型启发式教学方法的组织方案和实施要点。该教学方法以学生的学与练为主体、以培养实际问题能力为目标,体现了理论联系实践的教学理念。本文讨论的教学实例虽然针对 ABAQUS 有限元软件,但对 CAD/CAE/CAM 等软件应用课程的教学都有一定参考意义。

参 考 文 献

- 1 郑翔,顾乡. 有限元分析课程引入问题式学习(PBL)教学探索. 力学与实践, 2011, 33(6): 88-91
- 2 张大英. 面向软件应用的有限元课程教学改革与探讨. 高等建筑教育, 2014, 23(5): 91-94
Zhang Daying. The reform and discussion of finite element teaching for software application. *Journal of Architectural Education in Institutions of Higher Learning*, 2014, 23(5): 91-94 (in Chinese)
- 3 田和强, 苏春建, 李桂莉等. 基于翻转课堂的机械类专业 CAD/有限元软件课程教学设计. 教育教学论坛, 2014(9): 158-159
- 4 尹飞鸿, 何亚峰. MOOC 教育模式下“有限元法与软件应用”课程教学改革研究. 常州工学院学报, 2016, 29(3): 90-92
Yin Feihong, He Yafeng. Teaching reform on the finite element method and software application in the MOOC education mode. *Journal of Changzhou Institute of Technology*, 2016, 29(3): 90-92 (in Chinese)
- 5 孙伟, 汪博. 面向有限元课程的创新实践教学方法研究. 中国教育技术装备, 2018, 434(8): 129-131
Sun Wei, Wang Bo. Research on method of innovative practical teaching of finite element course. *China Educational Technology & Equipment*, 2018, 434(8): 129-131 (in Chinese)
- 6 汪中厚, 曹欢, 刘欣荣. 基于理论知识的 CAE 课程教学改革. 教育界, 2015(1): 111
- 7 陈松, 丁军, 龚海峰等. CAE 软件应用类课程教学方法改革与实践. 科教导刊, 2015(8): 105-106
Chen Song, Ding Jun, Gong Haifeng, et al. The practice research and teaching model reform of CAE software courses. *The Guide of Science & Education*. 2015(8): 105-106 (in Chinese)
- 8 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础(上). 北京: 清华大学出版社, 2001
Lu Mingwan, Luo Xuefu. *Foundations of Elasticity*. Beijing: Tsinghua University Press, 2001 (in Chinese)
- 9 航空工业部科学技术委员会. 应力集中系数手册. 北京: 高等教育出版社, 1990

(责任编辑: 胡 漫)