

基础谐波激励单侧约束简支梁系统的 动力学特征分析¹⁾

周 岩²⁾ 肖世富³⁾

(中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川绵阳 621999)

摘要 为研究间隙碰撞对系统动力学响应的影响, 以理想简支梁的振型函数为 Rayleigh-Ritz 基函数建立了单侧约束简支梁系统的非线性离散动力学方程组, 应用数值方法研究了系统在基础谐波激励下的动力学响应特征及其对共振频率线性等效方法适用性的影响。研究表明: 非线性动力学系统间隙产生的局部碰撞, 使得系统振动能量在系统各阶模态之间转移, 使得线性等效方法失效; 即使进行非线性分析, 也需要考虑系统固有频率远大于激励频段上限的模态。

关键词 单侧约束, 碰撞, Rayleigh-Ritz 方法, 线性等效方法, 模态能量转移

中图分类号: O317 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-18-468

DYNAMICAL CHARACTERISTICS ANALYSIS FOR UNILATERAL CONSTRAINED SIMPLY SUPPORTED BEAM WITH HARMONIC WAVE EXCITATION¹⁾

ZHOU Yan²⁾ XIAO Shifu³⁾

(Institute of System Engineering, CAEP, Mianyang 621999, Sichuan, China)

Abstract In order to study the influence of the gap collision on the dynamic response of the system, the nonlinear discrete dynamics equations of the unilateral constrained simply supported beam system are derived by using the Rayleigh-Ritz function as the mode function of an ideal simply supported beam. The dynamic response characteristics of the system under the fundamental harmonic excitation and its influence on the applicability of the linear equivalent method of the resonant frequency are studied by numerical methods. It is shown that the local collision caused by the gap of the nonlinear dynamic system will lead to the system vibration energy transfer between the various modes of the system, which makes the linear equivalent method invalid. Even in nonlinear analysis, it is necessary to consider the modes in which the natural frequency of the system is much larger than the upper limit of the excitation band.

Key words unilateral constraint, impact, Rayleigh-Ritz method, equivalent linearization method, modal energy transfer

2018-11-29 收到第 1 稿, 2019-01-14 收到修改稿。

1) 国家重点研发计划资助项目 (2016YFB0201004)。

2) 周岩, 硕士研究生, 研究方向为柔性多体系统动力学。E-mail: 1037001594@qq.com

3) 肖世富, 研究员, 研究方向为柔性多体系统动力学与结构动力学。

引用格式: 周岩, 肖世富. 基础谐波激励单侧约束简支梁系统的动力学特征分析. 力学与实践, 2019, 41(3): 270-277

Zhou Yan, Xiao Shifu. Dynamical characteristics analysis for unilateral constrained simply supported beam with harmonic wave excitation. *Mechanics in Engineering*, 2019, 41(3): 270-277

实际工程结构及其子结构中, 广泛存在含间隙的单侧约束, 在动载荷作用下, 单侧约束局部可能产生碰撞现象, 间隙碰撞将对系统动力学响应和分析方法的选取产生重要影响, 属于典型的非线性动力学问题。目前, 对于实际工程结构的非线性动力学问题, 一般存在两种求解思路和途径: 其一是直接非线性求解, 但由于计算方法、软硬件等的限制, 目前的求解规模有限, 对于非线性随机振动问题的研究成果大部分是关于个位数的多自由度系统^[1], 因此对实际工程动力学问题需要极大程度地降维处理, 必然引起人们对分析结论产生质疑; 其二是将非线性动力学问题简化、等效为线性动力学问题, 然后应用模态叠加法或子结构模态综合法等对系统进行降阶, 从频域角度进行求解和分析, 这是当前工程界的主流方法。然而, 当工程结构中存在含间隙单侧约束时, 线性等效方法是否有效? 如何认识试验结果和现象? 这些都是工程关心的问题, 本文以基础谐波激励含间隙单侧约束简支梁为例, 分析系统的动力学特征, 探讨线性等效方法的有效性, 以加深对此类问题的认识。

谐波激励下含间隙单侧约束系统的动力学响应, 是典型的间隙碰撞动力学问题。一直以来, 国内外学者对该类碰撞振动问题进行了大量的研究。在运动副和曲柄滑块方面, 郝雪清等^[2]研究了运动副材料不同时间隙机构动力学特性的变化; Koshy 等^[3]研究了无润滑时含间隙曲柄滑块机构运动副间隙处的碰撞力特性, 并通过实验进行了验证; 王旭鹏等^[4]对含间隙转动副曲柄滑块机构在不同间隙、不同驱动载荷以及不同摩擦系数下进行了数值计算。在梁的受迫振动方面, 李彪等^[5]分析了轴向运动黏弹性 Timoshenko 梁的横向非线性强受迫共振的响应问题; 杨晓东等^[6]研究了两端带有相同刚度扭转弹簧铰支的轴向运动梁横向振动问题; 魏克湘等^[7]建立了基础激励和定轴转动联合作用时电流变夹层梁的运动微分方程, 并研究了基础简谐激励和匀速旋转运动作用时电流变夹层梁的振动稳定性; 赵登峰^[8]运用分段线性系统分析理论研究了间隙约束的悬臂梁振动系统在简谐激励下系统稳态响应的动力学行为。在其他方面, 王铁成等^[9]研究了混合间隙对多体系统力学特性的影响; 刘强^[10]研究了含间隙裂缝的钢筋混凝土结构对称滞回非线性问题; Tian 等^[11]对含有单个间隙的柔性系统进行了分析。

而以等效线性化方法为代表的对非线性随机振动响应简化的分析方法, 也有着大量的研究和应用。

等效线性化方法自 Caughey^[12]提出后, 被扩展到了多种结构特性和激励作用的情况中。彭解华等^[13]给出了一种处理阻尼元件和弹性元件只作并联连接的非线性系统随机振动的有效方法。白鸿柏等^[14]在对 2 自由度含有黏性阻尼双线性迟滞恢复力振动系统简谐激励下的响应问题进行的研究中将等效线性化计算方法推广至含有滞迟环节的多自由度非线性振动系统中。曲哲等^[15]通过分析结构特性对等效线性化方法的影响, 提出了能够较全面反应结构特性的等效线性化模型。何勇等^[16]建立了一种多自由度柔性结构非线性随机振动响应分析方法, 并通过算例证明该方法有较好的计算精度和计算效率。路纯红等^[17]将等效线性化法与谐波平衡法结合求解了一类非线性振动系统在确定性简谐激励下的稳态周期响应, 为非线性振动系统响应求解方法的研究提供了新思路。周道传等^[18]对多种等效线性化方法等效模型进行分析和总结, 研究了等效线性化方法应用于桥梁结构基于位移抗震设计的可能性和计算过程。

从以上的研究可见, 在含间隙的碰撞振动问题中, 研究者大多集中于对碰撞动力学特性及其影响因素的研究, 而对含间隙碰撞过程中具体的动力学响应特征及其产生机制的研究较少; 在对非线性随机振动响应简化的分析方面, 研究者的关注点大多在于对等效线性化的计算方法和计算精度的比较探讨, 而缺乏对等效线性化方法适用性的研究。本文应用数值方法研究了基础谐波激励下含间隙单侧约束简支梁的动力学响应特征, 同时对计算该类问题线性等效方法的适用性进行了分析, 对工程实际应用有一定的参考意义。

1 系统建模

考虑图 1 所示基础激励单侧约束均匀简支梁, 设梁长为 L , 横截面积为 A , 转动惯量为 I , 密度为 ρ , 弹性模量为 E ; 在距离简支梁左端点 $1/4$ 处有一单侧约束弹簧, 弹簧刚度为 K , 距梁平衡位置的间隙为 d 。

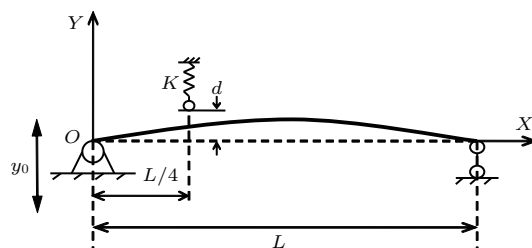


图 1 基础激励单侧约束简支梁示意图

本文采用 Rayleigh-Ritz 方法建立系统的离散动力学模型进行分析。首先分析系统的机械能。梁的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{y}_0 + \dot{y})^2 dx \quad (1)$$

梁的势能为

$$U = \frac{1}{2} K (y(L/4, t) - d)^2 s(y(L/4, t) - d) + \frac{1}{2} \int_0^L EI (y'')^2 dx \quad (2)$$

式中 s 为单位阶跃函数, 即

$$s(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

应用 Rayleigh-Ritz 方法, 设

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (4)$$

式中基函数采用了简支梁的低阶模态; n 是基函数的阶数, 由基础激励的频段和解的收敛性确定。

将式(4)代入式(1)~(2)积分, 设 $\omega_0^2 = \frac{EI\pi^4}{\rho AL^5}$ (ω_0 为标准简支梁系统的基频)、 $k = 2K/(\rho AL\omega_0^2)$, 并作伸缩变换 $\tau = \omega_0 t$, 再考虑系统的模态阻尼, 则可得系统的离散动力学方程组

$$k \sin \frac{i\pi}{4} \left(\sum_{j=1}^n y_j \sin \frac{j\pi}{4} - d \right) \cdot s \left(\sum_{j=1}^n y_j \sin \frac{j\pi}{4} - d \right) + \ddot{y}_i + 2c_i i^2 \dot{y}_i + i^4 y_i = -\frac{2}{i\pi} [1 - (-1)^i] \ddot{y}_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

式中 c_i 为模态阻尼比。

对单侧约束的局部碰撞载荷 $F(\tau)$ 无量纲化, 设 $f = 2F/(\rho AL\omega_0^2)$, 则无量纲化局部碰撞载荷为

$$f(\tau) = k \left(\sum_{i=1}^n y_i \sin \frac{i\pi}{4} - d \right) s \left(\sum_{i=1}^n y_i \sin \frac{i\pi}{4} - d \right) \quad (6)$$

设非线性动力学方程组(5)的基础加速度谐波激励为

$$\ddot{y}_0 = A_0 \sin \omega \tau \quad (7)$$

则系统响应收敛性可由取 n 阶和 $n-1$ 阶基函数时梁上某点响应的幅频响应残差进行判断, 即取残差为

$$\Delta y_n(x_0, \omega) = A_n(x_0, \omega) - A_{n-1}(x_0, \omega) \quad (8)$$

式中 A_n 为取 n 阶基函数时, 梁在激励频率 ω 处的位移或加速度响应幅值。

动力学方程组(5)的线性等效系统为

$$\ddot{y}_i + 2c_i i^2 \dot{y}_i + i^4 y_i + k_e \sum_{j=1}^n y_j \sin \frac{i\pi}{4} \sin \frac{j\pi}{4} = -\frac{2}{i\pi} [1 - (-1)^i] \ddot{y}_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

线性源系统(即无单侧约束系统)为

$$\ddot{y}_i + 2c_i i^2 \dot{y}_i + i^4 y_i = -\frac{2}{i\pi} [1 - (-1)^i] \ddot{y}_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

线性源系统各阶模态频率为

$$\omega_{0,i} = i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

2 不同单侧约束刚度下系统的基础激励谐波响应分析

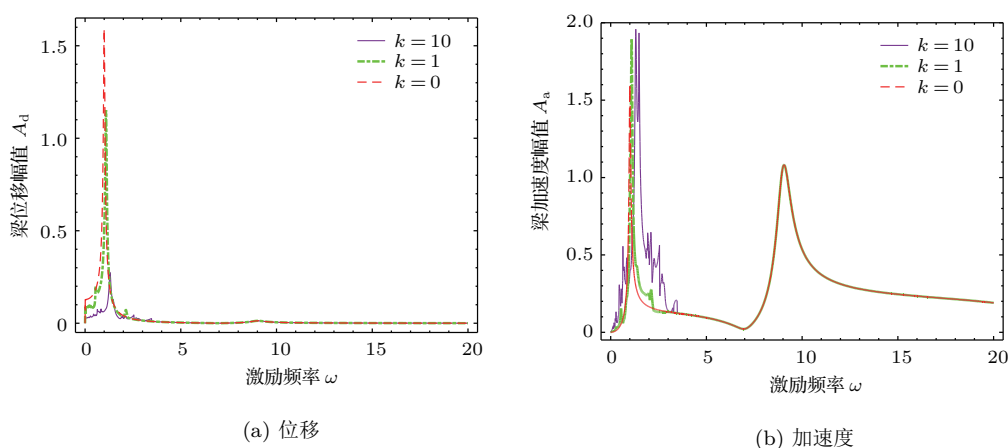
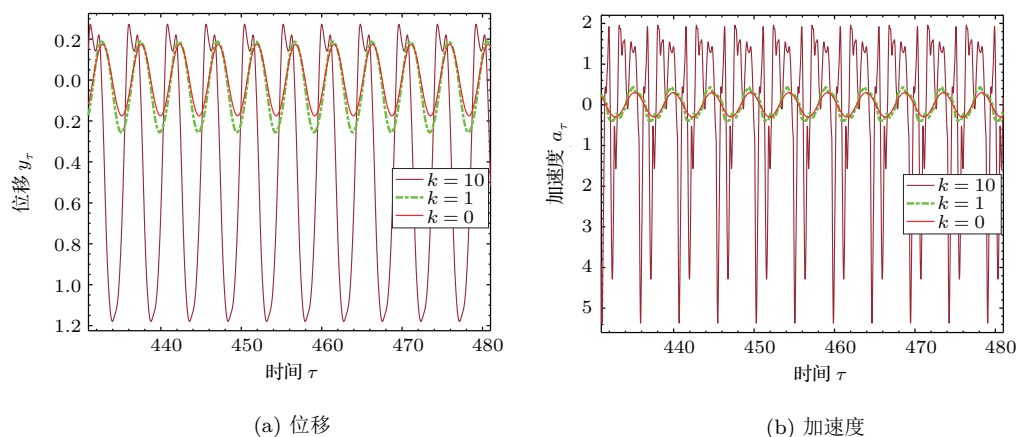
设系统单侧约束间隙 $d = 0.02$, 各阶模态阻尼比相等, $c_i = 4\%$ ($i = 1, 2, \dots, n$); 基础激励频段 $\omega \in (0, 20]$ 、基础激励加速度幅值 $A_0 = 0.2$ 。下面采用数值方法分析不同单侧约束刚度下, 非线性系统(5)在基础加速度谐波激励下的动力学响应特征及其产生的机制。

在激励频段内, 动力学方程组(5)的线性源系统(10)存在4阶模态, 其中基础激励载荷在第一阶、第三阶模态上具有分量(即模态参与因子不为零), 在第二阶、第四阶模态上没有分量(模态参与因子为零); 第五阶及以上高阶模态在激励频段外, 基础激励载荷奇数阶模态参与因子不为零、偶数阶模态参与因子为零。而非线性单侧约束耦合了激励频段内线性源系统的前三阶模态和激励频段外除了4的倍数以外的各阶模态。由于系统的非线性效应, 在式(8)中至少需要考虑五阶模态, 本文取 $n = 5$, 且考虑到响应最好能包含前五阶模态坐标的响应, 本文取 $x_0 = L/6$ 。

考虑三种不同程度的约束刚度, 取 $k = \{0.0, 1, 10\}$, 其中 $k = 0$ 对应线性源系统。分别对系统进行基础激励谐波响应分析, 系统在距梁端点 $x = L/6$ 处的位移和加速度幅频响应曲线如图2所示, 在 $\omega = 1.31$ 谐波激励时的位移时域响应如图3所示。

图2和图3的计算结果表明:

(1) 非线性系统位移响应在线性源系统第一阶共振频率临近产生较大峰值的共振, 加速度响应在线性源系统第一阶和第三阶共振频率临近都产生了较大峰值的共振;

图2 梁 $L/6$ 处的位移和加速度幅频响应图3 $\omega = 1.31$ 谐波激励时梁 $L/6$ 处的时域响应

(2) 随着单侧约束刚度的增强, 系统第一阶共振响应的位移峰值响应逐步减小、加速度响应逐步增大, 其共振频率也随着单侧约束刚度的增强而增大, 体现出较明显的刚度强化效应;

(3) 第三阶共振峰值未超过约束间隙, 其频率和响应未受单侧约束的影响 (当激励载荷增大时, 将出现与第一阶模态类似的特征, 本文略);

(4) 随着单侧约束刚度的增强, 系统谐波激励时域响应逐渐由线性源系统的单谐波响应演变为多谐波混合响应。

图2和图3出现的非线性响应特征主要由单侧约束局部撞击载荷产生。不同单侧约束刚度下, 时域撞击载荷计算结果如图4所示。为更突显撞击载荷的特征, 图4增加了单侧约束刚度 $k = 0.5$ 和 $k = 200$ 情形。

图4的撞击载荷计算结果表明, 随着单侧约束刚度的增强, 约束产生的撞击载荷的峰值增大、脉

宽变窄, 从而激励其系统频率更高的模态, 并将更多的低阶模态能量转移到所激起的高阶模态坐标上, 引起系统响应出现多谐波混合效应。各阶模态坐标上的幅频如图5~图8所示, 其中第五阶模态坐标增加了单侧约束刚度 $k = 0.5$ 和 $k = 200$ 情形。

图4~图8的计算结果表明, 当无约束、系统为线性时, 系统响应只有第一阶和第三阶模态坐标分量; 随着约束的增强, 第一阶模态坐标能量逐步向第二、三、五阶模态坐标上转移, 且随着约束刚度的增强, 其响应越大, 甚至可能使第五阶模态坐标的响应成为系统加速度响应的主要贡献者 (如单侧约束刚度 $k = 200$ 情形)。

同时, 单侧约束撞击载荷的这一特点, 将对系统解的收敛性产生影响。不同单侧约束刚度下, 基于式(8)的残差计算结果如图9所示, 同样为了分析单侧约束刚度对系统解收敛性的影响, 图9中增加了 $k = 0.5$ 和 $k = 200$ 两种约束刚度情形。

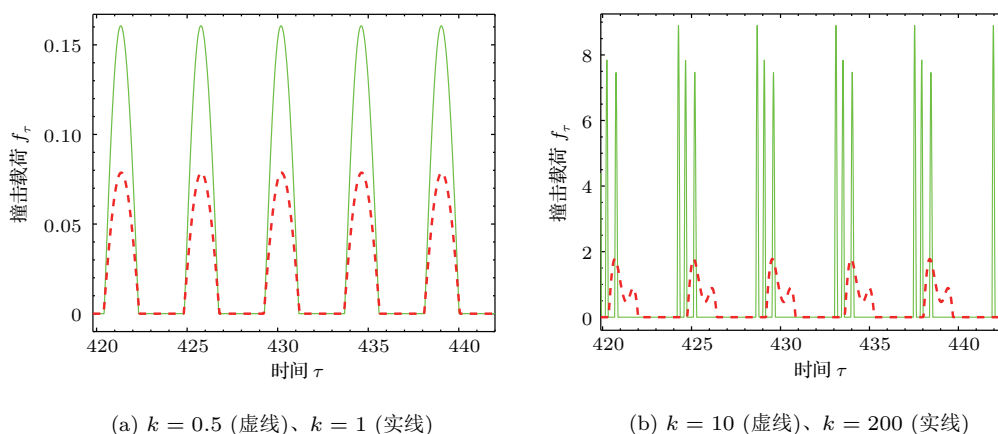


图4 不同单侧约束刚度下的撞击载荷

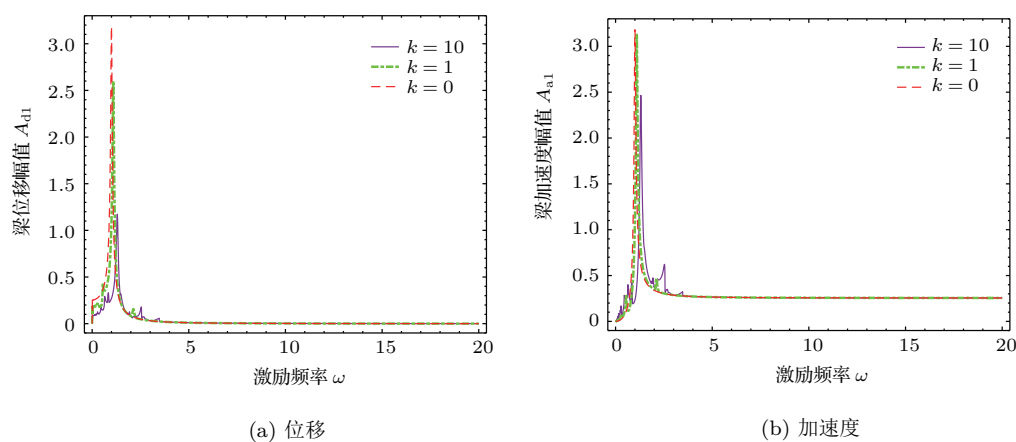


图5 第一阶模态坐标位移和加速度幅频响应

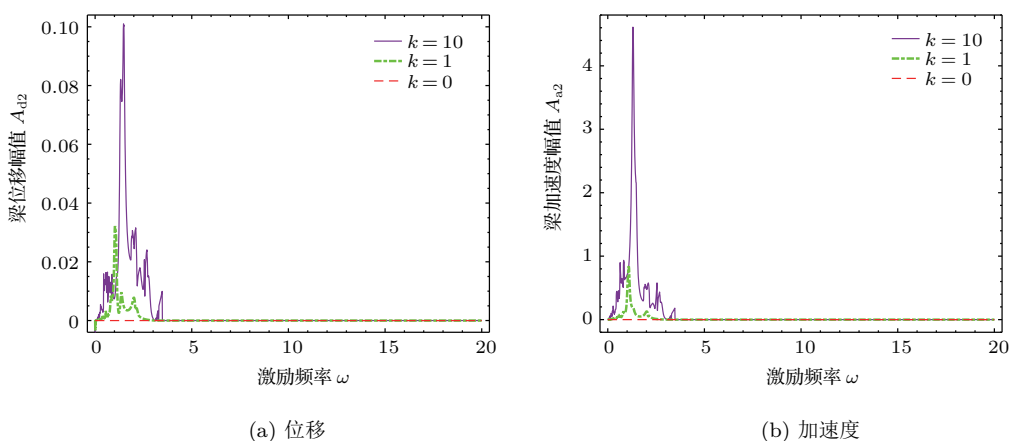


图6 第二阶模态坐标位移和加速度幅频响应

图9的计算结果表明,在单侧约束刚度较小时,如 $k \leq 10$ 时,由于单侧约束产生的撞击载荷峰值较小、脉宽较宽,采用线性源系统激励频段内的模态为基函数建立系统的动力学方程,就能获得较好的计算收敛结果;当单侧约束刚度增大到一定程度,单侧约束产生的撞击载荷峰值增

大、脉宽变窄,系统幅频响应残差也随之增大,再采用线性源系统激励频段内的模态为基函数建立系统动力学方程,则不能获得较好的计算收敛结果。如图8所示的第五阶模态坐标上的响应,与残差的变化规律一致,都是随着单侧约束刚度的增大而变大,而第五阶模态在基础激励频段之外,

其基础激励载荷分量很小, 激励的响应也很小, 其响应必然由单侧约束引起。因此, 当线性系统额外存在间隙约束且约束刚度较强时, 仅仅采用激励频

段内的模态离散线性系统是不够的, 需要扩展激励频段外的多阶模态才有可能获得较好的计算收敛结果。

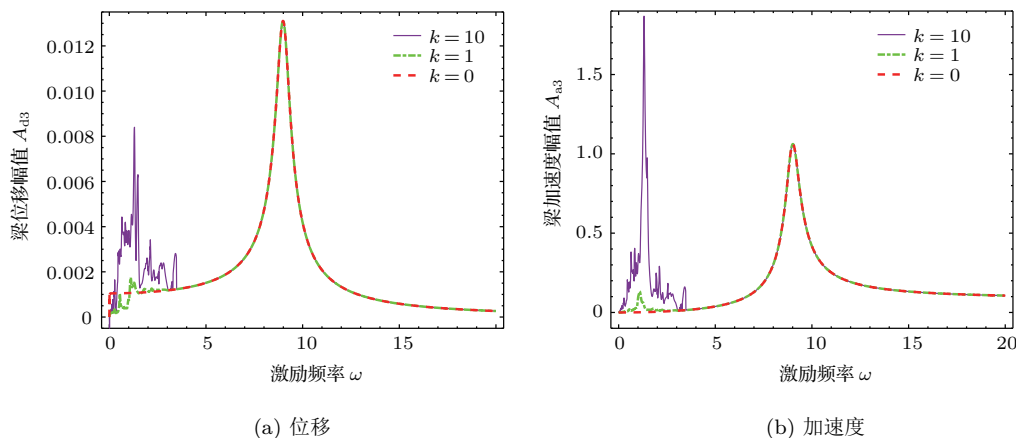


图 7 第三阶模态坐标位移和加速度幅频响应

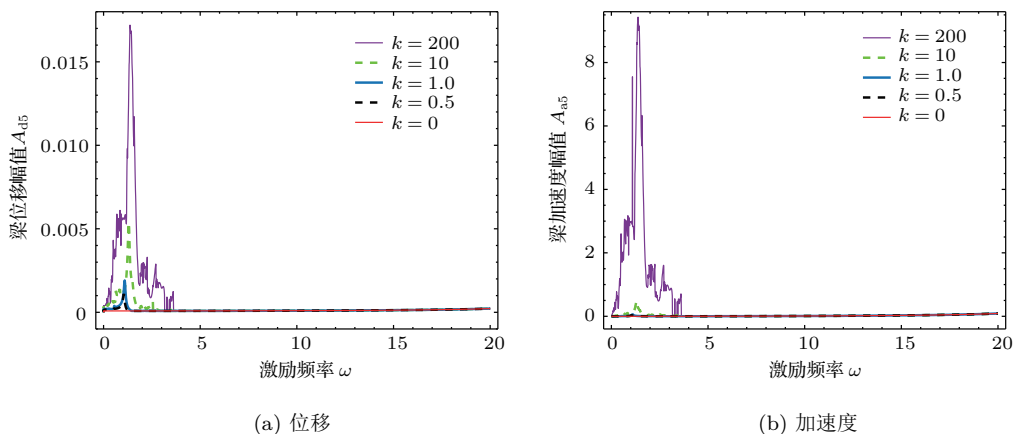


图 8 第五阶模态坐标位移和加速度幅频响应

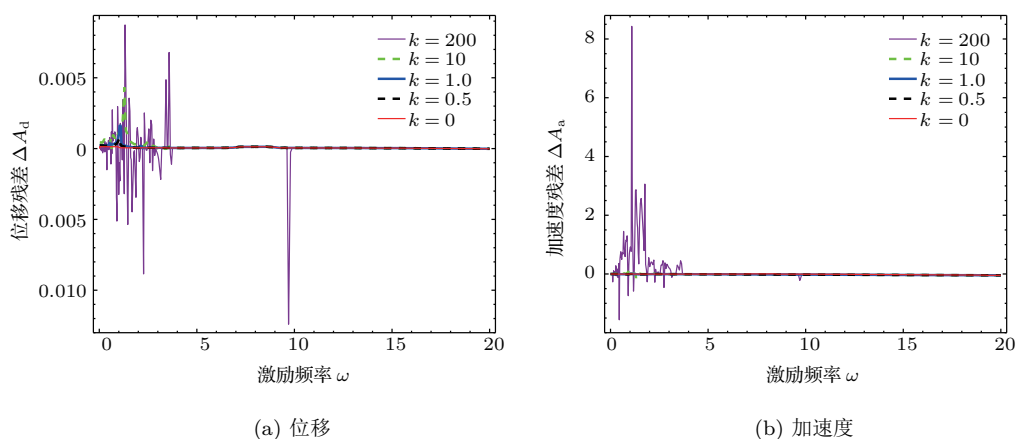


图 9 不同约束刚度下距梁端点 $L/6$ 处系统幅频响应残差

3 共振频率等效线性化方法的适用性分析

现在暂时抛开离散系统对连续系统的收敛性, 以单侧约束刚度 $k = 200$ 时的五阶非线性离散系统

作为研究对象, 考察共振频率等效线性化方法(其他线性等效方法类似)求解单侧约束非线性系统问题的适用性。对于式(9), 取 $n = 5$, 其共振频率满足的代数特征值方程为

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2}k_e - \omega^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}k_e & \frac{1}{2}k_e & 0 & -\frac{1}{2}k_e \\ \frac{1}{\sqrt{2}}k_e & 2^4 + k_e - \omega^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}k_e & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}k_e \\ \frac{1}{2}k_e & \frac{1}{\sqrt{2}}k_e & 3^4 + \frac{1}{2}k_e - \omega^2 & 0 & -\frac{1}{2}k_e \\ 0 & 0 & 0 & 4^4 - \omega^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}k_e & -\frac{1}{\sqrt{2}}k_e & -\frac{1}{2}k_e & 0 & 5^4 + \frac{1}{2}k_e - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

基于非线性系统梁上加速度响应识别其共振频率,第一阶共振峰频率为 $\omega_{0,1} = 1.42$,再基于该共振频率识别系统的线性等效刚度,则考虑激励频段内的前三阶模态,识别的等效刚度为 $k_e = 2.41$,考虑前五阶模态,识别的等效刚度为 $k_e = 2.42$,分别计算系统的正弦扫频幅频响应,则梁上 $L/6$ 处位移和加速度幅频响应计算结果及其与非线性系统响应的比较如图10所示。

图10的线性等效模型计算结果及其与非线性系统的响应比较表明:

(1) 线性等效方法可反映激励频段内的各共振峰,且可很好等效系统的共振频率,但其响应峰值差别巨大;

(2) 考虑激励频段外的模态坐标对于线性等效模型响应计算无意义,这也是线性等效模型共振峰值差异巨大的根本原因(本文所考察非线性系统的响应主要由激励频段内模态能量转移到激励频段外模态坐标上所贡献);

(3) 线性等效不能很好反映非线性系统的模态能量转移机制,因此线性等效方法对于存在间隙、碰撞等非光滑本质非线性系统基本不适用。

4 结论与认识

本文以理想简支梁的振型函数为Rayleigh-Ritz基函数,建立了基础谐波激励单侧约束简支梁系统的非线性离散动力学方程组,应用数值方法研究了系统的动力学响应特征及其对线性等效方法适用性的影响,获得以下结论和认识:

(1) 单侧约束非线性将使系统出现较明显的刚度强化效应;

(2) 单侧约束产生的局部碰撞将使振动能量在线性源系统各阶模态之间发生转移、谐波激励时域响应出现多谐波混合效应,且随着约束刚度的增强,局部撞击载荷峰值越大、脉宽越窄,振动能量将转移到更高阶的模态上;

(3) 单侧约束撞击载荷将对Rayleigh-Ritz方法离散系统的收敛性产生显著影响,在单侧约束刚度较强时,离散系统时需要考虑线性源系统固有频率远大于激励频段上限的模态;

(4) 对于含间隙单侧约束非线性系统,以共振频率等效为代表的线性等效方法虽然可较准确反映激励频段内的共振频率,但从本质上不能反映非线性系统的模态能量转移机制,对于存在间隙、碰撞等本质非线性的系统基本不适用,即使考虑激励频

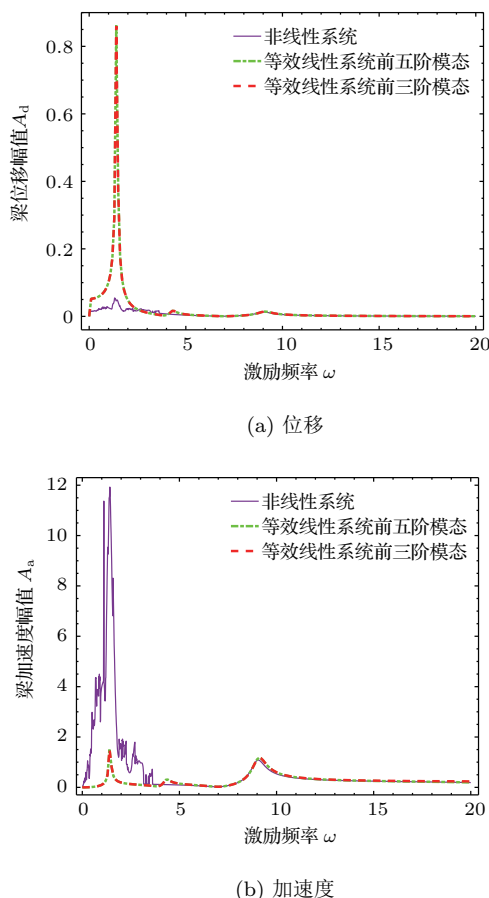


图10 等效线性系统梁 $L/6$ 处位移和加速度幅频响应及其与非线性系统的比较

段外的模态坐标也无意义。

参 考 文 献

- 1 金肖玲, 王永, 黄志龙. 多自由度非线性随机系统的响应与稳定性. 力学进展, 2013, 43(1): 56-62
Jin Xiaoling, Wang Yong, Huang Zhilong. Response and stability of multi-degree-of-freedom nonlinear stochastic systems. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 56-62 (in Chinese)
- 2 郝雪清, 陈江义. 不同运动副材料对间隙机构动力学特性的影响. 振动与冲击, 2012, 31(12): 19-21
Hao Xueqing, Chen Jiangyi. Effects of different materials in joints on dynamic characteristics of mechanism with clearance. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(12): 19-21 (in Chinese)
- 3 Koshy CS, Flores P, Lankarani HM. Study of the effect of contact force model on the dynamic response of mechanical systems with dry clearance joints: computational and experimental approaches. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1-2): 325-338
- 4 王旭鹏, 刘更, 马尚君. 含间隙运动副机构的动力学特性研究. 振动与冲击, 2016, 35(7): 110-115
Wang Xupeng, Liu Geng, Ma Shangjun. Dynamic characteristics of mechanisms with revolute clearance joints. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(7): 110-115 (in Chinese)
- 5 李彪, 唐有琦, 丁虎等. 轴向运动黏弹性 Timoshenko 梁横向非线性强迫振动. 振动与冲击, 2012, 31(13): 142-146
Li Biao, Tang Youqi, Ding Hu, et al. Nonlinear vibrations of axially moving viscoelastic Timoshenko beams under strong external excitation. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(13): 142-146 (in Chinese)
- 6 杨晓东, 陈立群. 带有扭转弹簧两端铰支轴向运动梁的横向振动分析. 振动与冲击, 2006, 25(4): 149-150
Yang Xiaodong, Chen Liqun. Vibrations of an axially transporting beam with torsional springs and simply supported. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(6): 149-150 (in Chinese)
- 7 魏克湘, 孟光, 张文明. 基础简谐激励下匀速旋转运动电流变夹层梁的振动稳定性. 振动与冲击, 2011, 30(4): 42-46, 90
Wei Kexiang, Meng Guang, Zhang Wenming. Vibration stability of a rotating ER sandwich beam under constant angular velocity and harmonic base excitation. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(4): 42-46, 90 (in Chinese)
- 8 赵登峰. 间隙约束悬臂梁系统动力行为研究. 力学与实践, 2008, 30(2): 53-57
Zhao Dengfeng. Study on the dynamic behavior of cantilever beam systems with a clearance restriction. *Mechanics in Engineering*, 2008, 30(2): 53-57 (in Chinese)
- 9 王铁成, 陈国平, 马方等. 含混合间隙多体系统动力学分析. 振动与冲击, 2016, 35(9): 178-183
Wang Tiecheng, Chen Guoping, Ma Fang, et al. Dynamic analysis of multibody systems with mixed clearance. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(9): 178-183 (in Chinese)
- 10 刘强. 含间隙裂缝的 RC 结构滞回系统混沌振动分析. 力学与实践, 2011, 33(5): 33-37
Liu Qiang. Chaotic vibration analysis of a hysteretic system of RC structures with clearance crack. *Mechanics in Engineering*, 2011, 33(5): 33-37 (in Chinese)
- 11 Tian Q, Zhang Y, Chen L, et al. Simulation of planar flexible multibody systems with clearance and lubricated revolute joints. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 60(4): 489-511
- 12 Caughey TK. Equivalent linearization techniques. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1963, 35(11): 1706-1711
- 13 彭解华, 陈树年, 陈弘武. 一类非线性系统随机振动的等效线性化. 振动与冲击, 1995, 14(1): 30-35
Peng Jiehua, Chen Shunian, Chen Hongwu. Equivalent linearization technique to a class of non-linear multi-degree of freedom system. *Journal of Vibration and Shock*, 1995, 14(1): 30-35 (in Chinese)
- 14 白鸿柏, 郑坚, 张培林等. 2 自由度滞迟振动系统简谐激励响应的等效线性化计算方法研究. 机械工程学报, 2000, 36(11): 90-93
Bai Hongbai, Zheng Jian, Zhang Peilin, et al. Equivalent linearization approximate method of response computation of a two degree of freedom hysteretic vibration system under sinusoidal excitation. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2000, 36(11): 90-93 (in Chinese)
- 15 曲哲, 叶列平. 计算结构非线性地震峰值响应的等价线性化模型. 工程力学, 2011, 28(10): 93-100
Qu Zhe, Ye Lieping. An equivalent linear model to estimate maximum inelastic seismic responses of structural systems. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(10): 93-100 (in Chinese)
- 16 何勇, 金伟良. 多自由度柔性结构非线性随机振动响应分析方法. 计算力学学报, 2009, 26(6): 778-784
He Yong, Jin Weiliang. Nonlinear random vibration of multiple-degree-of-freedom flexible structures. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, 26(6): 778-784 (in Chinese)
- 17 路纯红, 白鸿柏, 胡仁喜. 一类非线性振动系统的响应计算方法. 振动与冲击, 2008, 27(11): 147-148
Lu Chunhong, Bai Hongbai, Hu Renxi. Method for solving the responses of a class of non-linear vibration system. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(11): 147-148 (in Chinese)
- 18 周道传, 董作超, 王林. 基于性能抗震设计中的等效线性模型研究. 地震工程与工程振动, 2013, 4(3): 110-117
Zhou Daochuan, Dong Zuochao, Wang Lin. Equivalent linearization model research on performance-based seismic design. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2013, 4(3): 110-117 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)