

偏心圆轮沿斜面纯滚动至连续弹跳的动力学分析

彭 凡¹⁾ 刘文洋 方棋洪 任毅如²⁾

(湖南大学机械与运载工程学院工程力学系, 长沙 410082)

摘要 研究了第十一届全国周培源大学生力学竞赛团体赛中轮子跳高试题的偏心圆轮方案, 建立了无初速度释放的偏心圆轮沿斜面纯滚动到连续跳动的动力学理论模型, 分析了弹跳现象的产生条件, 研究了纯滚动到连续弹跳的动力学过程, 给出了斜面倾角、初始释放角和摩擦系数等因素对跳跃行为的影响。

关键词 偏心轮, 纯滚动, 跳动, 碰撞, 力学竞赛

中图分类号: O31 文献标识码: A doi:10.6052/1000-0879-18-116

DYNAMIC ANALYSIS OF ECCENTRIC WHEELS ALONG SLOPE FROM PURE ROLLING TO CONTINUOUS BOUNCING

Peng Fan¹⁾ Liu Wenyang Fang Qihong Ren Yiru²⁾

(Department of Engineering Mechanics, College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract The high jump test of eccentric wheels in the team competition of the 11th National Zhou Peiyuan Competition on Mechanics is investigated. The dynamical model of the eccentric wheel rolling and bouncing on a slope is built. The bouncing condition is analyzed and obtained. The dynamical process from pure rolling to continuous bouncing after releasing without an initial velocity is studied. The influence of the inclined angle, the initial release angle and the friction coefficient on the bouncing behavior is revealed.

Key words eccentric wheel, pure rolling, bouncing, collision, mechanics competition

第十一届全国周培源大学生力学竞赛团体赛有一道轮子跳高的试题, 要求参赛同学制作一个特殊轮子, 其于斜面上静止释放后发生跳跃, 能跃过位于斜面底部的跳高横杆, 成绩由越过横杆的高度确定^[1]。此题有趣味性, 所蕴含的力学理论包括动力学普遍定理、摩擦、碰撞和弹性变形等。该跳高的问题有偏心轮和凸轮两种设计方案, 第七届力学竞赛个人赛中有关于偏心圆环在滚动过程中跳起条件的问题^[2-4], 但本文所指的跳高问题不仅需要跳起, 还要产生二次甚至多次跳动和碰撞以达到最大的跳起高

度。因此, 偏心圆轮需要具有较好的弹性, 沿斜面滚动而腾空并沿斜面发生多次弹跳并越过底部横杆。显然, 与运动员的“三级跳远”类似, 偏心轮若能产生连续弹跳, 则越过的横杆高度会较高。由于纯滚动到连续跳动过程是一个跳起再到接触和碰撞的复杂动力学过程, 难以进行精确的理论分析, 为了深入理解该运动过程, 本文在适当简化的基础上, 对偏心圆轮沿斜面纯滚动至连续弹跳的动力学过程进行理论分析, 相关结论也曾对我们设计团体赛试题起到了重要指导作用。

2018-03-26 收到第 1 稿, 2018-05-01 收到修改稿。

1) 彭凡, 教授。E-mail: fanpeng@hnu.edu.cn

2) 任毅如, 副教授。E-mail: renyiru@hnu.edu.cn

引用格式: 彭凡, 刘文洋, 方棋洪等. 偏心圆轮沿斜面纯滚动至连续弹跳的动力学分析. 力学与实践, 2019, 41(1): 72-75

Peng Fan, Liu Wenyang, Fang Qihong, et al. Dynamic analysis of eccentric wheels along slope from pure rolling to continuous bouncing. *Mechanics in Engineering*, 2019, 41(1): 72-75

1 偏心轮纯滚动引起的跃起及其与斜面的再接触

如图 1 所示, 设斜面倾角为 φ , 轮的质量为 m , 半径为 r , 沿厚度方向的质量分布不变, 质心 C 与轮心 O 之间相距 e 。偏心轮无初速释放后, 沿斜面滚动。以释放时轮与斜面的接触点为原点建立平面直角坐标系, 轮子沿斜面滚动的转角、角速度和角加速度分别为 θ, ω 和 α , 轮心 O 的加速度为 a_O 。

斜面的法向反力为

$$F_N = m(g \cos \varphi + e \alpha \sin \theta + e \omega^2 \cos \theta) \quad (1)$$

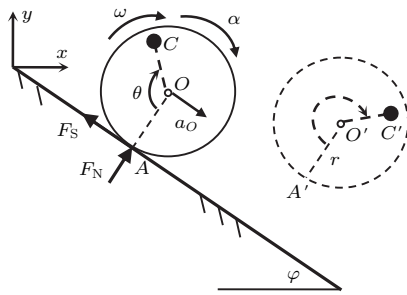


图 1 偏心圆轮的跳起

当 $F_N \rightarrow 0$, 必有摩擦力 $F_S \rightarrow 0$, 故 $\alpha \rightarrow 0$ 。由式 (1) 可知, 轮子与斜面脱离接触时, 有下式成立

$$g \cos \varphi + e \omega^2 \cos \theta = 0 \quad (2)$$

此即偏心轮在斜面上发生跳动的条件。由式 (2) 可见, 轮子需要获得一定的角速度 ω , 并且转角在一定的范围内才能跃起。

轮子在跃起前发生纯滚动, 应满足的条件为

$$F_N > 0, \quad |F_S| \leq f_S F_N \quad (3)$$

式中, f_S 表示静摩擦因素, F_S 为静摩擦力, 且有 $F_S = m[g \sin \varphi - (r - e \cos \theta) \alpha - e \omega^2 \sin \theta]$ 。

当偏心轮在跃起前为纯滚动时, 重力势能完全转换为滚动动能, 易满足产生跳跃的条件。若为滑动, 重力势能将转变为滑动摩擦耗散能、平动动能与转动动能, 偏心轮不一定能在合适的角度内获得足够的角速度起跳。故在后续内容中, 着重分析轮子由纯滚动产生的连续弹跳。由动能定理得到纯滚动时的角速度与角加速度分别为

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= 2g \frac{e [\cos(\theta + \varphi) - \cos(\theta_0 + \varphi)] + r(\theta - \theta_0) \sin \varphi}{r^2 + e^2 - 2er \cos \theta + \rho^2} \\ \alpha &= g \frac{[r \sin \varphi - e \sin(\theta + \varphi)] - er \omega^2 \sin \theta}{r^2 + e^2 - 2er \cos \theta + \rho^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, ρ 为偏心轮关于质心轴的回转半径, θ_0 为释放时所对应的角度。

记轮子与斜面脱离接触时的角度为 θ_t , 角速度为 ω_t , 令对应时间 $t = 0$, 质心的初速度分量为

$$\left. \begin{aligned} v_{Cx0} &= \omega_t [r \cos \varphi - e \cos(\theta_t + \varphi)] \\ v_{Cy0} &= \omega_t [-r \sin \varphi + e \sin(\theta_t + \varphi)] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

轮子在腾空过程中的位置由转角 θ 和质心 C 的直角坐标 x_C, y_C 描述, 其平面运动方程可写为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_{C0} + v_{Cx0}t \\ y_C &= y_{C0} + v_{Cy0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \theta &= \theta_t + \omega_t t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中, (x_{C0}, y_{C0}) 是质心的初位置, 有

$$\begin{aligned} x_{C0} &= r(\theta_t - \theta_0) \cos \varphi + r \sin \varphi - e \sin(\theta_t + \varphi) \\ y_{C0} &= -r(\theta_t - \theta_0) \sin \varphi + r \cos \varphi - e \cos(\theta_t + \varphi) \end{aligned}$$

在式 (6) 的基础上, 得到轮子腾空过程中轮心 O 的运

动方程为

$$\left. \begin{aligned} x_O &= x_C + e \sin(\theta_t + \varphi + \omega_t t) \\ y_O &= y_C + e \cos(\theta_t + \varphi + \omega_t t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

利用式 (7) 写出轮的圆周方程, 结合斜面的直线方程

$$\left. \begin{aligned} (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 &= r^2 \\ y &= -x \tan \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

导出轮边与斜面相交与否的判据为

$$\Delta = (x_O - y_O \tan \varphi)^2 - (1 + \tan^2 \varphi)(x_O^2 + y_O^2 - r^2) \quad (9)$$

自轮与斜面脱离接触瞬时开始, 在每一个时间步计算判据 Δ 的值, 若其小于 0, 轮子跃起后还没有与斜面再接触。从 $\Delta < 0$ 变化到 $\Delta \geq 0$, 表示轮子腾空下落后与斜面发生碰撞, 当 $\Delta = 0$, 轮的圆周线与斜面有一交点, 则轮与斜面再接触的接触点坐标

近似为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= \frac{x_O - y_O \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \\ y_A &= -x_A \tan \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

显然,由式(6)可得对应接触瞬时轮子的质心坐标。

2 偏心轮与斜面发生接触碰撞的过程分析

轮与斜面的再接触是一个复杂的摩擦碰撞过程,理论求解的难度大。为简化分析起见,考虑下面这样一种偏心轮构造,轮子的绝大部分质量集中分布在质心周围的很小区域内,则其关于质心轴的转动惯量很小,可近似认为偏心轮质量集中于质心,轮子发生对心碰撞,且碰撞前后的角速度相同。

如图2所示,轮子质心的速度分量碰前瞬时记为 v_{Cx} 和 v_{Cy} ,碰后瞬时为 v_{Cx0} 和 v_{Cy0} 。内法线和切线方向的冲量为 I_{An} 和 $I_{A\tau}$,其中,后面4个量未知,由以下方程求解。

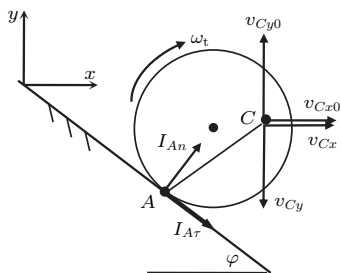


图2 圆轮与斜面的碰撞

由冲量定理

$$\left. \begin{aligned} I_{An} \sin \varphi + I_{A\tau} \cos \varphi - m(v_{Cx0} - v_{Cx}) &= 0 \\ I_{An} \cos \varphi - I_{A\tau} \sin \varphi - m(v_{Cy0} - v_{Cy}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

合碰撞冲量通过质心得下式

$$\frac{I_{An}}{I_{A\tau}} = \frac{(x_A - x_C) \sin \varphi + (y_A - y_C) \cos \varphi}{(x_A - x_C) \cos \varphi - (y_A - y_C) \sin \varphi} \quad (12)$$

考虑恢复系数为 μ 的弹性碰撞,有

$$\begin{aligned} &(v_{Cx0} + \mu v_{Cx}) \sin \varphi + \\ &(v_{Cy0} + \mu v_{Cy}) \cos \varphi + \\ &(1 + \mu)[(x_A - x_C) \sin \varphi - \\ &(y_A - y_C) \cos \varphi] \omega_t = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

将时间 t 置零,以碰撞结束瞬时的轮子质心坐标和速度作为初位置和初速度代入式(6)的右边,结合

式(7)和式(9)计算下一个时间步的轮子位置及其与斜面的接触判据 Δ ,若 Δ 小于零,则轮子将再次腾空,重复上述过程进一步计算下一次接触碰撞;若 Δ 大于或等于零,不会出现碰撞后的跳跃,即弹跳不连续,计算终止。由此,可得到不同初始释放角所对应的轮子发生连续弹跳次数。

3 算例及讨论

考虑图3所示的偏心圆轮,其由轻质大圆轮与重质小圆轮固结而成,两者都视为均质,大轮半径 $r = 75 \text{ mm}$;大轮与小轮的半径之比为 $10:1$,质量之比为 $1:40$;小轮轮心距大轮轮心 $5r/8$,偏心距 e 与偏心轮的半径 r 之比略等于 0.61 ;偏心轮整体质量为 0.15 kg ,斜面长 2 m 。取斜面倾角 $\varphi = 60^\circ$,恢复系数 μ 等于 1 ,相应 45° 和 30° 的摩擦角 ψ_m ,偏心轮可连续弹跳的次数与释放角度 θ_0 的关系示于图4和图5,当连续弹跳次数为“-1”时,表示轮在跃起之前已沿斜面发生了滑动,偏心轮可能不会发生跳跃,随后的动力学过程不在本文的讨论范围内。从图4和图5中可见,初始释放角度的影响非常明显,在不同角度释放,即使偏心轮纯滚动,随后发生连续弹跳的次数也不一定相同。

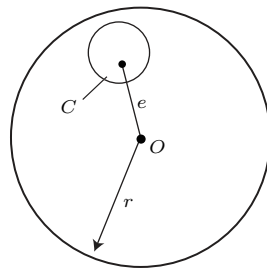


图3 偏心轮构造简图

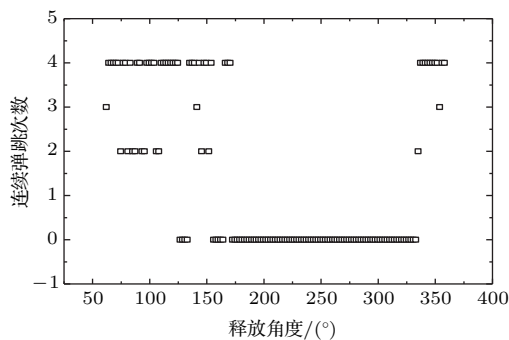
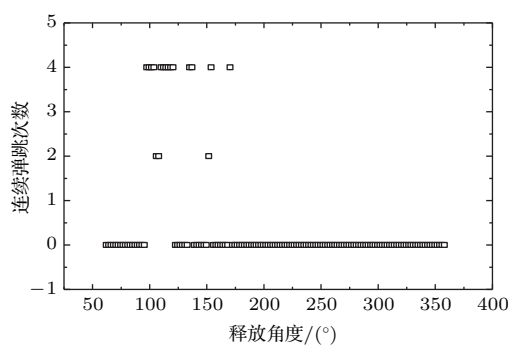
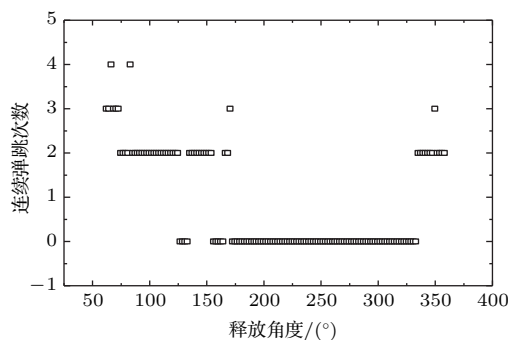
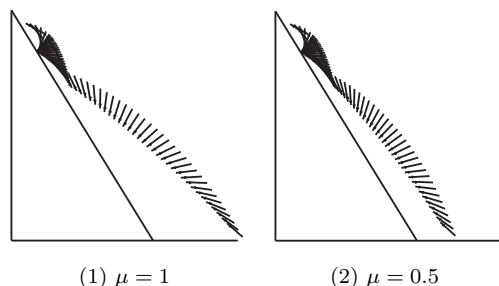


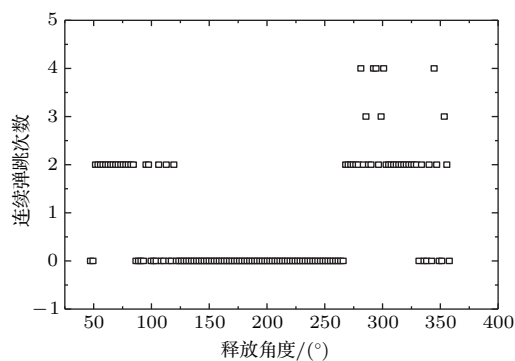
图4 连续弹跳次数和释放角度($\varphi = 60^\circ$, $\mu = 1$, $\psi_m = 45^\circ$)

图5 连续弹跳次数和释放角度 ($\varphi = 60^\circ$, $\mu = 1$, $\psi_m = 30^\circ$)

取 $\varphi = 60^\circ$, $\psi_m = 45^\circ$, $\mu = 0.5$, 偏心轮可连续弹跳的次数与释放角度 θ_0 之关系示于图6, 对比图4与图6可见, 当碰撞从完全弹性变为弹性后, 由纯滚产生连续弹跳的次数明显变小, 对应完全弹性碰撞, 连续4次跳起的初始释放角范围大。在斜面的相同位置, 以接近相同的角度释放偏心轮, 轮子由纯滚至发生连续弹跳的运动过程示于图7, 图中, 用含质心的直径(实线段加黑点)位置表示轮的位置。由虚线表示跃过斜面底部的高度, 可见, 恢复系数小, 相应的跃起高度也减小。

图6 连续弹跳次数和释放角 ($\varphi = 60^\circ$, $\mu = 0.5$, $\psi_m = 45^\circ$)图7 其中一条运动轨迹 ($\varphi = 60^\circ$, $\psi_m = 45^\circ$)

将斜面倾角降为 45° , 考虑 $\psi_m = 45^\circ$, $\mu = 0.5$, 偏心轮可连续弹跳次数和释放角的关系由图8给出, 可见, 斜面倾角变小后, 能够发生连续弹跳的释放角范围显著变窄。

图8 连续弹跳次数和释放角 ($\varphi = 45^\circ$, $\mu = 1$, $\psi_m = 45^\circ$)

4 总结

偏心轮沿斜面纯滚动产生的第一次跳跃不明显, 需要在后续过程中连续发生二次以上的弹跳才能达到较高的腾空高度。初始释放角、摩擦系数、弹性系数和斜面倾角对轮子的纯滚动到连续跳动过程影响极大。初试释放角度在某个角度范围内能够显著增加连续弹跳次数。在合理范围内尽可能增大斜面倾角和摩擦系数, 可以增加产生连续弹跳的初始释放角的选取范围。选择弹性恢复系数大的材料或者增大斜面倾角可以增大轮子的腾空高度。

参考文献

- 任毅如, 方棋洪, 肖万伸等. 第十一届全国周培源力学竞赛“理论设计与操作”团体赛命题和竞赛总结. 力学与实践, 2018, 40(5): 599-608
- Ren Yiru, Fang Qiqi, Xiao Wanshen, et al. The summing up on the question setting and contest results for the group events of 'Theoretical Design and Operation' in the 11th National Zhou Peiyuan Mechanics Competition for Students. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(5): 599-608 (in Chinese)
- 《力学与实践》编辑部. 第七届全国周培源大学生力学竞赛试题. 力学与实践, 2009, 31(4): 103-105
- Editorial Department of Mechanics in Engineering. The 7th National Zhou Peiyuan College Students Mechanics Competition test. *Mechanics in Engineering*, 2009, 31(4): 103-105 (in Chinese)
- 高云峰, 蒋持平. 全国大学生力学竞赛赛题详解及点评 (2015 年版). 北京: 机械工业出版社, 2015
- Gao Yunfeng, Jiang Chiping. Detailed Explanation And Comments on the National College Student Mechanics Competition (2015 edition). Beijing: Mechanical Industry Press, 2015 (in Chinese)
- 陈小亮. 圆环跳滚现象的力学分析. 力学与实践, 2010, 32(6): 120-121
- Chen Xiaoliang. Mechanical analysis on jumping and rolling of circular rings. *Mechanics in Engineering*, 2010, 32 (6): 120-121 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)