

求解梁的切应力的阶勒让德模型¹⁾

孟宪红* 邢依琳*,2) 刘双行† 石惠宁**

*(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

†(中石油华北油田公司第二采油厂, 河北霸州 065700)

** (中石油华北油田公司, 河北任丘 062552)

摘要 梁作为最简单的构件在工程中广泛应用. 由于经典梁理论在求解梁的切应力时需要引入平衡方程和剪切修正系数, 使得求解问题变得复杂. 该文采用高阶勒让德级数形式的位移函数, 并考虑上下边界处切应力为零的特点, 建立了梁的切应力的求解方法. 并将所得的理论结果与有限元方法的数值结果进行比较, 结果符合很好. 结果表明, 该文的理论模型能够准确地确定梁内部的正应力和切应力. 该文的研究可为梁的力学分析提供新的理论方法.

关键词 梁, 切应力, 经典梁理论, 勒让德函数

中图分类号: O343 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-14-351

A MODEL BASED ON THE HIGHER-ORDER LEGENDRE POLYNOMIALS TO SOLVE THE BEAM SHEAR STRESS¹⁾

MENG Xianhong* XING Yilin*,2) LIU Shuangxing† SHI Huining**

*(School of Aeronautical Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

† (PetroChina Huabei Oilfield Company, Bazhou 065700, Hebei, China)

** (PetroChina Huabei Oilfield Company, Renqiu 062552, Hebei, China)

Abstract As a simple component, the beam is widely used in engineering. In the classical beam theory, a modification factor and an equilibrium of the internal forces are introduced to obtain the shear stress, which makes the process complicated. In this paper, a displacement function of Legendre polynomials is proposed to analyze the shear stress with consideration of the conditions of zero transverse shear stress at the top and the bottom. The excellent agreement between the theoretical results and those obtained by the finite element method shows that the theoretical model of Legendre polynomials is capable of determining the shear stress of the beam accurately. Therefore, the method may provide a new theoretical reference for the mechanics analysis of the beam.

Key words beam, shear stress, classic beam theory, Legendre polynomials

在工程问题中, 梁作为最简单的构件被广泛应用. 同时, 梁在材料力学^[1]、结构设计^[2-3]、振动理论^[4]等学科中也具有重要的作用. 其理论研究经过

了长期的发展, 目前最为经典的梁理论主要包括欧拉梁理论和铁木辛柯梁理论^[5-6].

一般情况下, 欧拉梁理论忽略了横向变形和横

本文于 2014-11-13 收到.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11172022).

2) E-mail: yilinxing8023@sina.com

引用格式: 孟宪红, 邢依琳, 刘双行等. 求解梁的切应力的阶勒让德模型. 力学与实践, 2015, 37(5): 626-629

Meng Xianhong, Xing Yilin, Liu Shuangxing, et al. A model based on the higher-order legendre polynomials to solve the beam shear stress. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(5): 626-629

向正应变的影响, 假设纯弯曲时梁的所有横截面仍保持平面^[1], 如图 1(a) 所示, 且与纵线正交, 即剖面转角等于挠度曲线的一阶导数, 这意味着切应变为零. 因此, 需通过轴向平衡条件得到相应的切应力. 欧拉梁理论可以用于处理工程中有关梁的大部分静、动力学问题^[7]. 但欧拉梁理论忽略了平面的横向变形, 所以当梁较短, 或其实际长度虽然很长, 但有效长度很短时, 利用欧拉梁理论得不到满意的结果. 因此, 欧拉梁理论只适用于跨高比较大的梁. 针对这一问题, 铁木辛柯提出了剪切梁理论来提高结果的精度.

如图 1(b) 所示, 与欧拉梁理论相比, 剪切梁理论仍然采用平剖面假设, 但放松了截面始终垂直于挠度曲线的假设, 因此截面转角不再与挠度曲线的一阶导数相等, 即梁可以发生剪切变形^[8].

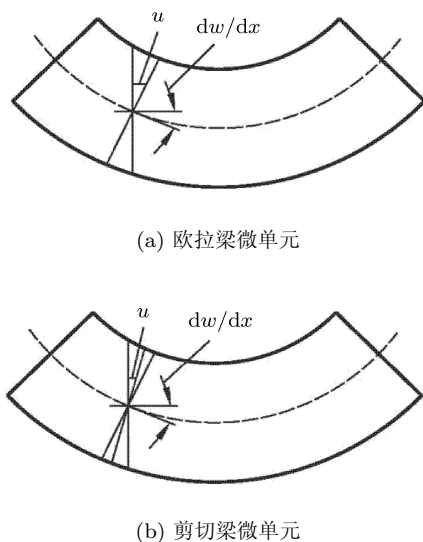


图 1 欧拉梁微单元与剪切梁微单元比较

值得指出的是, 平剖面假设使剪切梁的切应力沿着梁的高度方向不变, 并且在梁的上下表面也不为零, 因此在铁木辛柯梁理论中, 引入了截面剪切修正系数来减少这种误差^[9-10], 即 $\tau_{zx} = kG\gamma$. 但是, 剪切梁理论得到的切应力沿着梁的高度仍是均匀分布的, 虽然引入了修正系数, 但是该模型依然不能准确描述切应力沿梁高度方向的变化趋势^[11].

针对以上两种经典梁理论的不足, 本文在高阶剪切变形理论^[12]的基础上, 引入了勒让德多项式形式的位移函数, 同时考虑满足梁上下表面切应力为零的边界条件, 建立了相应的力学模型, 对梁的正应力与切应力进行了分析.

1 模型建立

本文以经典的悬臂梁为模型, 如图 2 所示, z 轴为沿着梁高度方向变化的坐标轴, x 轴为水平坐标轴, 所以任何点的位移场为 (x, z) .

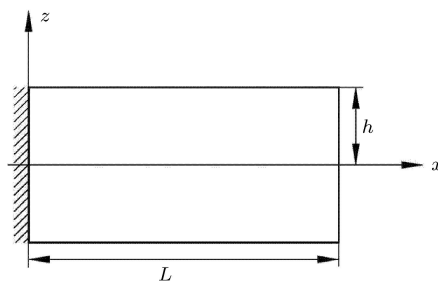


图 2 悬臂梁分析模型

结构内任意一点的位移可由方程 (1) 表示

$$\begin{aligned} u &= \theta_1(x)P_1(z) + \theta_3(x)P_3(z) \\ w &= w(x) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, u, w, θ 分别为梁的水平位移、竖直位移与截面转角, $P_n(z)$ 为勒让德多项式

$$\begin{aligned} P_1(z) &= z \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z) \end{aligned} \quad (2)$$

由上下自由边界处切应力为零的特征, 即当 $z = h, \tau_{xz} = 0$ 时, 得到方程

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dx}\right) = \\ G[\theta_1(x)P_1'(z) + \theta_3(x)P_3'(z) + w']_{z=h} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式中, G 为剪切模量, τ_{xz} 为剪应力, γ_{xz} 为剪应变.

通过方程 (3) 可以解得 θ_3 , 将其代入方程 (1) 中, 得到一组新的位移函数表达式

$$u = \theta_1(x)[P_1(z) + \alpha P_3(z)] + \alpha P_3(z)w' \quad (4)$$

其中, $P_1'(h) = 1, \alpha = \frac{-1}{P_3'(h)}$.

从而得到相应的物理方程 (5) 和 (6)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x = E\frac{\partial u}{\partial x} = \\ E\theta_1'(x)[P_1(z) + \alpha P_3(z)] + Ew''\alpha P_3(z) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dx}\right) = \\ G\theta_1(x)[P_1'(z) + \alpha P_3'(z)] + Gw'[1 + \alpha P_3'(z)] \end{aligned} \quad (6)$$

式中 E 为弹性模量, σ_x 为正应力.

梁的虚功原理为

$$\int_0^L \int_{-h}^h (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) b dz dx = \int_0^L q(x) b \delta w dx \quad (7)$$

其中, ε_x 为正应变, $q(x)$ 为横向外载荷, b 为梁的厚度, 为方便计算, 假设梁的厚度为 1. 将 ε_x , γ_{xz} 变分后代入虚功方程 (7) 中, 并通过分部积分可以得到

$$\begin{aligned} & [M_1(x) \delta \theta]_0^L + \left[M_3(x) \frac{d}{dx} \delta w \right]_0^L + \\ & \left[\left(Q(x) - \frac{d}{dx} M_3(x) \right) \delta w \right]_0^L + \\ & \int_0^L \left(-\frac{d}{dx} M_1(x) + Q(x) \right) \delta \theta dx + \\ & \int_0^L \left(\frac{d^2 M_3(x)}{dx^2} - \frac{dQ(x)}{dx} - q(x) \right) \delta w dx = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中, M, Q 为定义的广义弯矩与广义力, 表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \int_0^h 2\sigma_x [P_1(z) + \alpha P_3(z)] dz \\ M_3 &= \int_0^h 2\sigma_x \alpha P_3(z) dz \\ Q &= \int_0^h 2\tau_{xz} [P'_1(z) + \alpha P'_3(z)] dz \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

从方程 (8) 中, 可以得到控制微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_1(x)}{dx} - Q(x) &= 0 \\ \frac{d^2 M_3(x)}{dx^2} - \frac{dQ(x)}{dx} - q(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

和相应的边界条件

$$\left. \begin{aligned} M_1(x) &= \overline{M}_1(x) \\ M_3(x) &= \overline{M}_3(x) \\ Q(x) - \frac{dM_3(x)}{dx} &= \overline{Q}(x) - \frac{d\overline{M}_3(x)}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将方程 (5) ~ (6) 及 (9) 代入到微分方程 (10), 可以得到如下的平衡方程

$$\left. \begin{aligned} A_{11}\theta'' + A_{12}w''' - A_{21}\theta - A_{21}w' &= 0 \\ A_{12}\theta''' + A_{13}w^{(4)} - A_{21}\theta' - A_{21}w'' - q(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中, A_{ij} 只与材料和结构有关, 表达式为

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \int_0^h E [P_1(z) + \alpha P_3(z)]^2 dz \\ A_{12} &= \int_0^h E \alpha P_3(z) [P_1(z) + \alpha P_3(z)] dz \\ A_{13} &= \int_0^h E [\alpha P_3(z)]^2 dz \\ A_{21} &= \int_0^h G (1 + \alpha P'_3(z))^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

通过平衡方程 (12) 和边界条件 (11), 可以解得位移函数的表达式, 应用方程 (5) 和 (6) 可以确定正应力和切应力.

2 算例分析

选取如图 2 所示的悬臂梁为研究对象, 采用工程中常用的合金钢材料, 其相应的材料常数为 $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.25$; 梁的结构常数为 $h = 20 \mu\text{m}$, $L = 80 \mu\text{m}$.

在梁的右端施加单位横向集中力, 即 $\overline{Q} = 1 \text{ N}$, 分析其正应力与切应力的变化情况. 由方程 (11) 得到 $x = 0, x = L$ 处的边界条件

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \theta = 0, w'_1 &= 0 \\ x = L, M_1 = 0, M_3 &= 0 \\ Q(x) - \frac{dM_3(x)}{dx} &= \overline{Q} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

当载荷 $q(x) = 0$ 时, 求解方程 (12) 可以得到表达式

$$\left. \begin{aligned} \theta(x) &= \frac{\alpha_{1,j}}{\lambda_j} \exp(\lambda_j x) + \frac{1}{2} \alpha_{1,3} x^2 + \alpha_{1,4} x + \alpha_{1,5} \\ w'(x) &= \frac{\alpha_{2,j}}{\lambda_j} \exp(\lambda_j x) + \frac{1}{2} \alpha_{2,3} x^2 + \alpha_{2,4} x + \alpha_{2,5} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中, $j = 1, 2$; λ_j 可由 $\theta_1(x)$, $w'(x)$ 的表达式代入平衡方程 (13) 求得

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 A_{11} - A_{21} & \lambda^2 A_{12} - A_{21} \\ \lambda^2 A_{12} - A_{21} & \lambda^2 A_{13} - A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

将方程 (15) 代入边界条件, 利用方程 (5) 可以确定受单位横向集中力作用时的正应力. 如图 3 中, 给出了 $x = 40 \mu\text{m}$ 处, 正应力沿 z 轴的变化情况.

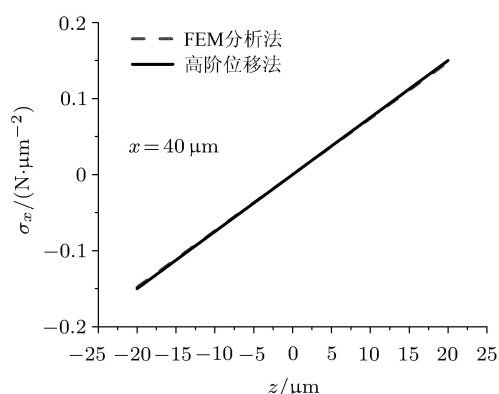


图 3 在单位横向集中力作用下, 梁内正应力的变化的趋势

可以看出, 使用勒让德级数所得的正应力的理论值 (实线) 和有限元方法分析的数值解 (虚线) 之间符合很好.

利用方程 (6) 可以确定相应的切应力. 如图 4 中, 给出了切应力沿 z 轴的变化情况.

由图 4 可以看出, 使用勒让德级数所得的切应力的理论值 (实线) 和有限元方法分析的数值解 (虚线) 之间基本一致.

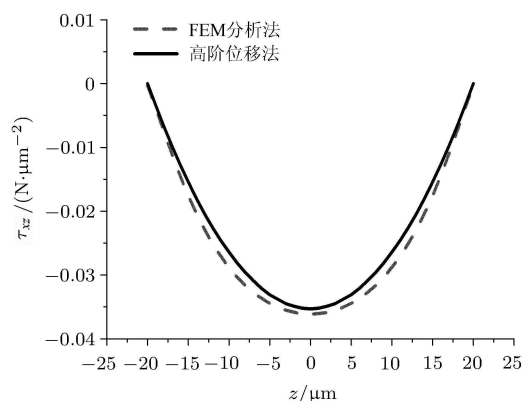


图 4 在单位横向集中力作用下, 梁内切应力的变化的趋势

3 结 论

本文引入了高阶勒让德级数形式的位移函数, 应用虚功原理得到了控制方程, 并考虑满足切应力在上下边界为零的条件, 建立了梁的切应力的求解方法. 本文针对悬臂梁在横向集中力作用下的具体情形, 给出了正应力和切应力的理论分析结果, 并与有限元的分析结果进行了对比, 两者均符合很好. 结果表明, 本文的理论模型能够很好地反映梁在外力作用时的力学特性, 准确地确定其内部的正应力和切应力. 因此, 本文的研究可为梁的力学分析提供新的求解方法.

参 考 文 献

- 1 单辉祖. 材料力学. 北京: 高等教育出版社, 2009
- 2 陆凌云. 剪切梁的工程理论与三维弹性力学几种变分原理的关系. 北京航空航天大学学报, 1984, (3): 006
- 3 周杰. 简支梁经典理论适用性的研究. 广州: 华南理工大学, 2013
- 4 陈光远. 悬臂梁振型的弯曲变形和剪切变形分解. 佳木斯大学学报, 2014, 32(3): 337-340
- 5 高阳, 王敏中. 梁理论的发展历史及其方法论. 兰州, 第三届全国力学史与方法论学术研讨会, 2007
- 6 Timoshenko SP. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1921, 41(245): 744-746
- 7 王昆鹏, 夏禾, 郭薇薇. 基于欧拉梁假定的柔性多体动力学车桥耦合振动分析模型. 北京交通大学学报 (自然科学版), 2013, 37(6): 55-61
- 8 邢誉峰, 李敏. 计算固体力学. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011
- 9 Cowper GR. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33(2): 335-340
- 10 周燕国, 丁皓江, 陈云敏. Timoshenko 梁剪切系数的一种推导. 固体力学及其应用学术研讨会, 杭州, 2013
- 11 边东洋. Timoshenko 梁理论的缺陷及其运动方程的修正. [硕士学位论文]. 上海: 同济大学, 2008
- 12 石广玉. 梁的高阶剪切理论及六阶微分方程的求解. 北京, 庆祝中国力学学会成立 50 周年暨中国力学学会学术大会'2007, 2007

(责任编辑: 刘希国)