轴向拉伸钢管 I 型裂纹尖端的应力场 1)

张道明 *,2) 梁 力 †,3)

*(齐齐哈尔大学建筑与土木工程学院, 黑龙江齐齐哈尔 161006)

†(东北大学资源与土木工程学院, 沈阳 110004)

摘要 采用弹性断裂力学 Westergaard 的方法，分析在轴向拉伸载荷作用下钢管的 I 型裂纹尖端处的应力场. 基于 I 型裂纹钢管应力场的特征，设定尖端处的应力艾雷函数，给出其应力场模型边界条件和应力场的解析函数，并利用裂纹尖端处的切平面研究裂纹尖端局部应力场，建立了钢管裂纹尖端应力场模型. 通过钢管与平板 I 型裂纹应力场模型的对比，结果表明二者明显不同，钢管裂纹尖端处应力峰值影响范围仅与裂纹长度、拉应力相关.

关键词 钢管, 应力场, 裂纹, 影响范围

中图分类号：U663.7 **文献标识码**：A doi：10.6052/1000-0879-14-318

THE STRESS FIELD AT MODE I CRACK TIP ON STEEL PIPE UNDER AXIAL TENSION 1)

ZHANG Daoming*,2) LIANG Li†,3)

*(The College of Architecture and Civil Engineering Qiqihar University, Qiqihar 161006, Heilongjiang, China)

†(School of Resources and Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract Based on the method of Westergaard, the mode I crack stress field is obtained for related boundary conditions. The tangent plane at the crack tip is used as the stress field area at the pipe crack tip. The mode I crack tip stress field and its influence area are obtained, and the differences of the crack tip stress fields are shown between the pipe and the flat plate. The theoretical result shows that the influence area of the crack tip stress field is related to the crack length and the tensile stress.

Key words pipe, stress field, crack, influence area

工程事故实践表明，钢构件的疲劳损伤都起始于构件的初始裂纹. 研究表明，构件表面和内部都存在各种类型裂纹. 所以导管式海洋平台钢管、船舶工程中的钢管、各类钢管的钢桁架构件抗疲劳设计，都应建立在研究外力作用下构件裂纹尖端处的应力场，裂纹扩展过程和裂纹扩展形态基础上，才能确保构件承载的安全性 [1-4]. 该应力场是由裂纹尖端处的应力状态和裂纹尖端处的峰值应力影响范围组成. 对于钢管的初始裂纹，无论是疲劳起始裂纹扩展 (即开裂扩展)，还是疲劳裂纹的亚临界扩展 (从起始裂纹扩展到导致构件最后发生失稳扩展以前的阶段)，都取决于构件缺陷裂纹尖端附近局部区域的应力场 [5-8]. 目前对应力场力学行为的研究，主要有基于线弹性断裂力学的无限大板裂纹尖端应力状

2014–11–03 收到第 1 稿，2014–12–09 收到修改稿.

1) 黑龙江省教育厅科学技术研究项目资助 (12541884).

2) 张道明，副教授，博士后，研究方向为结构工程. E-mail: zdmzdm@sina.com

3) 梁力，教授，博士，主要从事工程力学数值方法研究. E-mail: ll-neu@163.com

引用格式：张道明, 梁力. 轴向拉伸钢管 I 型裂纹尖端的应力场. 力学与实践, 2015, 37(4): 513-517

Zhang Daoming, Liang Li. The stress field at mode I crack tip on steel pipe under axial tension. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(4): 513-517

态 [5,9]，强度因子和断裂判据研究其峰值应力行为. 目前钢管的裂纹断裂普遍采用含裂纹的 “无限” 大平板断裂力学进行理论分析 [9-10]. 然而钢管为曲面，因此裂缝对钢管应力影响不同于平板中的裂纹尖端应力场. 本文针对钢管结构的 I 型裂纹尖端的复杂应力场力学特征，建立钢管裂纹尖端应力场理论分析模型，研究钢管中裂纹尖端的应力场. 基于尖端处峰值应力影响范围很小，因此采用裂纹尖端处的切平面，代替曲面钢管裂纹尖端处峰值的应力作用面，研究其 I 裂纹尖端处的应力场.

1 钢管轴向拉伸应力场

根据圣维南原理，在距开裂纹一定距离时，钢管的应力场不受裂缝大小和形态的影响，满足柯西平衡方程. 在外载荷作用下，钢管截面内力由弯矩 M、剪力 Q、扭矩 T 和轴力 N 组成. 对于桁架等结构的构件主要是受拉的支管产生疲劳破坏. 因此根据截面内力平衡，在轴向拉力 N 作用下，其管截面总和可表示为

$$N=\int_A \sigma_z \mathrm{d}A \tag{1}$$

$$\sigma_z=\frac{N}{A} \tag{2}$$

式中，A 为管截面，σ_y 为管截面轴向拉应力. 如图 1，在柱状坐标系中，轴向拉力作用下，管截面产生管心法向切向力 σ_θ，其极坐标平衡方程可表示如下

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{\partial r}+f_\theta=0 \tag{3}$$

在轴力作用下钢管的边界条件，$\tau_{r\theta}=0$，$f_\theta=0$，方程 (3), 可表示如下

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}=0 \tag{4}$$

由方程 (4) 可知 σ_θ 为常数. 由于钢管壁厚与钢管直径很小，$\sigma_r=0$. 根据钢管在轴力作用下的力学行为，其环向位移可表示如下

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}\left(\sigma_\theta-\mu\sigma_r-\mu\sigma_z\right)=0 \tag{5}$$

$$\sigma_\theta=\mu\sigma_r+\mu\sigma_z=\mu\sigma_z \tag{6}$$

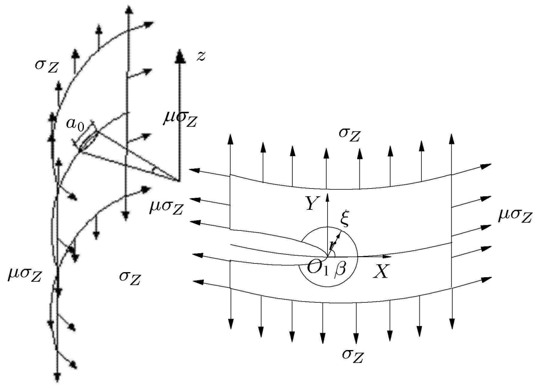

图 1 轴向拉伸钢管 I 型微裂纹

2 裂纹对钢管应力场的影响

在轴向拉伸荷载作用下，钢管任意微单元处于双向受力状态, 见图 1. 双向受力状态的钢管微单元应力状态为单向拉伸和等应力双向拉伸两种微单元应力状态叠加.

2.1 含裂纹钢管应力函数

钢管表面为圆形柱状表面，其表面有一道垂直管轴向的裂缝. 由于钢管表面不同于 “无限大平板”，因此其裂纹尖端应力场推导应考虑钢管表面弯曲特点. 用弹性断裂力学 Westergaard 的方法 [5]，裂纹应力函数可表示如下

$$\varPhi=\mathrm{Re}\tilde{Z}(R)+z\mathrm{Im}\mu\tilde{Z}(R)+\frac{A}{2}(a^2-z^2) \tag{7}$$

式中，$\varPhi$ 为双调和函数，$\tilde{Z}(R)$ 为复变解析函数 $Z(R)$ 的二重积分，R 为复变函数，表达式如下

$$R=a+\mathrm{i}y \tag{8}$$

式中 a 为 1/2 裂纹弧长. $\varPhi$ 为艾雷函数, 即为双调和函数，应满足于 $\Delta^2\Delta^2\varPhi=0$

$$\begin{aligned}\Delta^2\Delta^2\varPhi=\Delta^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial^2 a}+\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\Big)\varPhi\cdot\\ \Big(\frac{\partial^2}{\partial^2 a}+\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\Big)(2\mathrm{Re}Z(R))=0\end{aligned} \tag{9}$$

含裂纹钢管应力场表达式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{La}&=\frac{\partial\varPhi}{\partial z^2}=\mathrm{Re}Z(R)\ z\mathrm{Im}Z'(R)-A\\ \sigma_{Lz}&=\frac{\partial\varPhi}{\partial a^2}=\mathrm{Re}Z(R)+z\mathrm{Im}Z'(R)+A\\ \tau_{Lz\theta}&=\frac{\partial\varPhi}{\partial a\partial z}=-z\mathrm{Re}Z'(R)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

由式 (10), 可知选择满足全部边界条件的复变解析函数 $Z(R)$ 是确定应力场的关键. 在柱状坐标

系条件下，管的圆心为坐标原点，对应裂缝的圆心角为 $2\theta_0$，裂缝弧长为 a_0, $a=r\theta_0/2$，见图 1.

参考 "无限大" 板中的裂纹尖端处应力函数，设 $Z(R)$ 可表示如下

$$Z(R)=\frac{\sigma_z(1-\mu)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{R}\right)^2}}-A=\frac{R\sigma_z(1-\mu)}{\sqrt{R^2-a^2}}\ A \tag{11}$$

2.2 应力边界条件及验证

基于钢管和裂纹的几何和受力特点，其应力边界条件如下：

在 $z=0$, $|\theta|>\theta_0$ 且 $|\theta|\to\theta_0$ 时，$\sigma_{Lz}\to\infty$; 钢管最大影响角为 180°, $|\theta|\to 180°$, $\sigma_{La}=\mu\sigma_Z$

$$\sigma_{La}=\mathrm{Re}Z(R)-A=\mu\sigma_Z \tag{12}$$

$$A=(0.5-\mu)\sigma_Z \tag{13}$$

$$\sigma_{Lz}=\mathrm{Re}Z(R)+A=\sigma_z \tag{14}$$

$$\tau_{Lz\theta}=-z\mathrm{Re}Z'(R)=0 \tag{15}$$

在裂纹面内，$z=0$ 处，有

$$|\theta|<\theta_0\ 时,\ \ \sigma_{Lz}=\tau_{Lz\theta}=0 \tag{16}$$

在 $z=0$ 时，$\sigma_{Lz}=\mathrm{Re}Z(R)$ 与 $Z(R)$ 同量纲，$z=0$ 为 σ_{Lz} 对称轴，由式 (11)

$$Z(R)=\frac{\sigma_z(1-\mu)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r\theta_0}{r\theta}\right)^2}}-A=\begin{cases}\dfrac{\theta\sigma_z((1-\mu))}{\sqrt{\theta^2-\theta_0^2}}-A, & \theta\geqslant\theta_0\\ \mathrm{i}\dfrac{\sigma_z\theta(1-\mu)}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}-A, & \theta<\theta_0\end{cases} \tag{17}$$

当 $z=0$, $\theta<\theta_0$，由式 (17)

$$\sigma_{Lz}=\mathrm{Re}Z(R)-y\mathrm{Im}Z'(R)=\mathrm{Re}Z(R)-A+A=0 \tag{18}$$

$$\tau_{Lz\theta}=-z\mathrm{Re}Z'(R)=0 \tag{19}$$

在裂纹尖端处，即 $z=0$, $|\theta|>\theta_0$, 且 $|\theta|\to\theta_0$ 时, $\sigma_{Lz}\to\infty$, $\tau_{Lz\theta}=0$

$$\sigma_{Lz}\Big|_{\substack{z=0\\ \theta\to\theta_0}}=(\mathrm{Re}(Z(R))+A)\Big|_{\substack{z=0\\ \theta\to\theta_0}}=\left.\frac{\sigma_z(1-\mu)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\theta_0}{\theta}\right)^2}}\right|_{\substack{z=0\\ \theta\to\theta_0}}\to\infty \tag{20}$$

$$\tau_{Lz\theta}=-z\mathrm{Re}Z'(R)=0 \tag{21}$$

由式 (11)~(21)，艾雷函数 $\varPhi$ 满足边界条件. 钢管任意一点应力场为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{La}=\mathrm{Re}Z(R)-z\mathrm{Im}Z'(R)-(0.5-\mu)\sigma_Z\\&\sigma_{Lz}=\mathrm{Re}Z(R)+z\mathrm{Im}Z'(R)+(0.5-\mu)\,\sigma_z\\&\tau_{Lz\theta}=-z\mathrm{Re}Z'(R)\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

2.3 钢管裂纹尖端应力场

由式 (22) 可知，钢管裂纹尖端局部的应力场的解析解十分复杂. 因此，基于平板 I 型裂纹顶端应力场影响范围较小的特点，在钢管曲表面裂纹尖端处钢管切平面被构建. 利用该切平面，在其平面上建立局部新的直角坐标系，代替钢管裂纹尖端曲面柱状坐标系. 新裂纹尖端切平面坐标系 X_1OY_1 和裂纹尖端局部影响区域如图 1，其复变量 ξ 代替复变量 R, 具体表示如下

$$\xi=r(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta) \tag{23}$$

根据式 (8), 则有

$$R=\xi+2a_0 \tag{24}$$

$$Z(\xi)=\frac{(\xi+a)\sigma_z(1-\mu)}{\sqrt{(\xi+a)^2-a^2}}-(0.5-\mu)\sigma_z=\frac{\sigma_z}{\sqrt{\xi}}\Big[\frac{(\xi+a)(1-\mu)}{\sqrt{(\xi+2a)}}-(0.5-\mu)\sqrt{\xi}\Big]=\frac{h(\xi)}{\sqrt{\xi}} \tag{25}$$

$$h(\xi)=\sigma_z\Big[\frac{(\xi+a)(1-\mu)}{\sqrt{(\xi+2a)}}-(0.5-\mu)\sqrt{\xi}\Big] \tag{26}$$

在裂缝尖端处，令 $h(\xi)$ 表示如下

$$\lim_{\xi\to0}h(\xi)=\sqrt{\frac{a}{2}}\sigma_z(1-\mu)=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{27}$$

K_{I} 为钢管裂纹强度因子，表示如下

$$K_{\mathrm{I}}=\sqrt{a\pi}\sigma_z(1-\mu) \tag{28}$$

裂纹尖端局部区域复变函数 $Z(\xi)$ 可表示如下

$$Z(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\Big(\cos\frac{\beta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\beta}{2}\Big) \tag{29}$$

$$Z'(\xi)=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}\xi^{-\frac{3}{2}}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\Big(\cos\frac{3\beta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{3\beta}{2}\Big) \tag{30}$$

将式 (29) 和式 (30) 代入式 (9)，钢管任意一点应力场为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{X_1}&=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\beta}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\right)-(0.5-\mu)\sigma_Z\\ \sigma_{Y_1}&=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\beta}{2}\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\right)+(0.5-\mu)\,\sigma_z\\ \tau_{X_1Y_1}&=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

式 (31) 与平板单向受拉和双向等值受拉 [5] 的应力场有明显的区别. 主要区别在强度因子和各应力的常数项上. 由式 (31) 可知, 裂纹端点处的峰值应力影响随远离端点而减小，在距离裂纹尖端一定范围外，任意点处的应力如图 1. 因此有

$$\sigma_{X_1}=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r_a}}\cos\frac{\beta}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\right)-(0.5-\mu)\sigma_Z=\mu\sigma_z \tag{32}$$

$$\sigma_{Y_1}=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r_z}}\cos\frac{\beta}{2}\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\right)+(0.5-\mu)\,\sigma_z=\sigma_z \tag{33}$$

由式 (32) 和式 (33) 的峰值应力影响范围 r 可表示如下

$$r_a=\frac{\left[\sqrt{a\pi}(1-\mu)\cos\frac{\beta}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\right)\right]^2}{2\pi(0.5+\mu)^2} \tag{34}$$

$$r_z=\frac{\left[\sqrt{a\pi}(1-\mu)\cos\frac{\beta}{2}\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\right)\right]^2}{2\pi(0.5+\mu)^2} \tag{35}$$

式中 r_a 和 r_z 分别为管裂纹水平切线方向和裂纹横向切线方向的峰值应力影响范围. 由式 (34) 和式 (35) 可知：裂缝尖端峰值应力影响范围并不是圆形区域，它仅与位置、裂缝长度和角度有关. 但当 $\beta=0$ 时，无论 r_a 和 r_z，在裂缝尖端水平切线方向峰值应力影响范围为

$$r_0=\frac{a(1-\mu)^2}{2(0.5+\mu)^2} \tag{36}$$

因此通过测量裂缝长度，可以预测估算裂缝扩展范围.

2.4 钢管裂纹尖端应力场塑性区域

由式 (30) 尖端附近区域主应力可表示为

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{37}$$

将式 (30) 代入式 (37), 设

$$A=\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}$$

$$B=\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\left[\sin\frac{3\beta}{2}-(0.5-\mu)\,\sigma_z\right]^2+\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_1=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r}}(A+B) \tag{38}$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{39}$$

$$\sigma_2=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r}}(A-B) \tag{40}$$

$$\sigma_3=0 \tag{41}$$

对于在单向拉伸载荷作用下的无裂纹光滑构件，当拉应力等于材料的屈服应力 σ_s 时，材料就进入屈服状态. 由式 (30) 可知，在尖端附近区域存在复杂的应力状态，由于钢材在复杂应力状态下符合 Miss 判据，在三向主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 作用下，等效应力 σ_e 达到屈服应力 σ_s 时，塑性区屈服. 具体如下

$$\sigma_\mathrm{e}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]} \tag{42}$$

式 (38), 式 (40) 和式 (41) 代入式 (42) 有

$$\sigma_\mathrm{e}=\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r_\mathrm{p}}}\sqrt{A^2+3B^2}=\sigma_\mathrm{s} \tag{43}$$

$$r_\mathrm{p}=\frac{A^2+3B^2}{2\pi}\left(\frac{K_\mathrm{I}}{\sigma_\mathrm{s}}\right)^2 \tag{44}$$

式中 r_p 为裂纹顶端塑性区范围. 当 $\beta=0$ 时，裂纹顶端塑性区 r_p0 为

$$r_\mathrm{p0}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_\mathrm{I}}{\sigma_s}\right)^2 \tag{45}$$

考虑到塑性区应力松弛，根据文献 [6] , 应力松弛后的塑性区范围 $\beta=0$ 在水平 x 轴方向扩大一倍. 考虑到塑性区域的扩展，裂纹有效长度为 $a+2r_\mathrm{p0}$，文献 [6] 和钢管轴向受平面应力状态，其强度因子修正系数 M 可表示如下

$$M_\mathrm{p}=\frac{1}{\sqrt{1-0.5\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_\mathrm{s}}\right)^2}} \tag{46}$$

修正后的强度因子 $K_\mathrm{I}^\mathrm{eff}$ 可表示如下

$$K_\mathrm{I}^\mathrm{eff}=M_\mathrm{p}YK_\mathrm{I} \tag{47}$$

根据文献 [6] 的附录 C 和钢管平面应力受力状态，式中 Y 为形状修正系数, 取 1.

3 裂纹尖端处钢管与“无限”平板应力场对比

3.1 钢管裂纹尖端应力场范围

钢材按其力学性质可分为软钢和硬钢. 软钢和硬钢在力学性能上有着明显的区别. 试验表明，软钢的应力–应变表现为 4 个阶段：弹性阶段、弹塑性阶段、塑性阶段和强化阶段, 而且钢材在静力作用下，拉伸和压缩性能基本相同. 为满足软钢力学特征，采用理想弹塑性模型为钢管材料本构模型. 具体表达式如下

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{\mathrm{s}} = E_{\mathrm{s}}\varepsilon_{\mathrm{s}}\,, \quad |\varepsilon_s| \leqslant \varepsilon_y \\ &\sigma_{\mathrm{s}} = f_y\,, \qquad \varepsilon_s > \varepsilon_y \text{ 或 } \varepsilon_{\mathrm{s}} < -\varepsilon_y \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

裂纹中心最高为 0.1 mm，裂缝长度和载荷见表 1，然后由裂纹处逐渐按梯度 (1:10) 向外放大. 轴心拉伸载荷施加在管端部. 具体钢管尺寸为截面直径 550 mm，壁厚 5 mm，屈服强度 345 MPa，弹性模量 200 GPa，裂纹长度 2 mm～4 mm 的穿透型裂缝，垂直于管轴向. 为了便于观察裂缝尖端的长方向应力影响区域，根据式 (36)，I 型裂缝尖端裂缝的长方向局部轴向拉应力峰值范围见表 2.

表 1　钢管在裂纹方向轴向拉应力峰值的塑性范围

裂纹长度/mm	塑性影响区 r_{p0}/mm				
	50 MPa	100 MPa	150 MPa	200 MPa	250 MPa
1	0.007	0.028	0.067	0.129	0.228
2	0.014	0.056	0.134	0.259	0.456
3	0.020	0.084	0.200	0.388	0.684
4	0.027	0.112	0.267	0.517	0.911
5	0.034	0.140	0.334	0.646	1.139

表 2　钢管和板在裂纹尖端方向拉应力峰值的影响范围

裂纹长/mm	1	2	3	4	5
钢管 r_0/mm	0.327	0.653	0.980	1.306	1.633
无限平板 r_0/mm	0.25	0.5	0.75	1	1.25

由表 2 中可知，裂纹尖端应力场范围随裂纹长度增加而迅速增大. 钢管微裂纹顶端应力场的峰值应力随载荷增加而增加，应力场范围没有随载荷发生扩展. 平板裂纹应力影响范围比钢管裂纹应力影响范围小. 微裂纹顶端峰值塑性区域范围有明显的扩大，但影响范围很小, 见表 1，对应力场范围无影响，和理论分析结果一致, 见图 2. 因此理论计算应力场范围可不考虑钢材的非线性，认为应力场范围随载荷增加无变化.

3.2 平板裂纹尖端应力场范围

平板尖端应力场 [6] 表达式如下

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\beta}{2}\Big(1-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\Big) - \sigma_Z \\ \sigma_y &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\beta}{2}\Big(1+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\Big) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{3\beta}{2} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

由式 (49) 可知，在平板 $\beta = 0$ 且无限远处，$\sigma_x = 0$ 和 $\sigma_y = \sigma_z$，因此不考虑裂纹塑性扩展，平板裂纹尖端应力场范围有

$$r_0 = \frac{a}{2} \tag{50}$$

式中, K_{I} 为平板裂纹应力的强度因子, 表示如下

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{a\pi}\sigma_z \tag{51}$$

考虑材料塑性的影响，其平面应力裂纹尖端应力场范围 R 可表示如下

$$R = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{K_{\mathrm{Ip}}^{\mathrm{eff}}}{\sigma_{\mathrm{s}}}\Big)^2 \tag{52}$$

式中，$K_{\mathrm{Ip}}^{\mathrm{eff}}$ 为平板裂纹塑性修正后的强度因子，根据文献 [6] 可表示如下

$$K_{\mathrm{Ip}}^{\mathrm{eff}} = M_{\mathrm{p}}\sqrt{a\pi}\sigma_z Y \tag{53}$$

表 3　平板在裂纹方向轴向拉应力峰值的塑性范围

裂纹长度/mm	塑性影响区 R/mm				
	50 MPa	100 MPa	150 MPa	200 MPa	250 MPa
1	0.011	0.044	0.104	0.202	0.356
2	0.021	0.088	0.209	0.404	0.712
3	0.032	0.132	0.313	0.606	1.068
4	0.042	0.175	0.418	0.808	1.424
5	0.053	0.219	0.522	1.010	1.780

由表 1 和表 3 可知，平板在裂纹处轴向拉应力作用下的拉应力峰值塑性范围要大于钢管裂纹拉应力峰值塑性范围.

4 结　论

(1) 采用柱坐标体系，建立 Westergaard 解析控制方程，给出的钢管裂纹尖端应力场不同于平板的裂纹应力场；

(2) 理论分析裂纹顶端的应力场影响范围很小，局部峰值应力影响范围仅与裂纹长度相关.

(下转第 507 页)

推断方法，根据该方法，为了得到可靠的预测结果，预测推断时需要综合考虑多模型选择不确定性和综合模型的模型形式不确定性．模型选择不确定性通过贝叶斯方法结合调节因子法量化，量化过程中涉及到的模型可信度与似然函数通过确定性模型计算结果与已知点实验数据均值获取．将该方法应用到某飞行器在不同攻角下侧向力系数的推断预测，展示了该方法在模型确认过程中内插预测推断的有效性，可为其他工程结构的不确定性预测推断提供借鉴．

参 考 文 献

1 Burnham KP, Anderson DR. Model Selection and Multi-Model Inference: A Practical Information-Theoretic Approach. New York: Springer-Verlag, 2002

2 Clemen RT. Combining forecasts: a review and annotated bibliography. *International Journal of Forecasting*, 1989, 5(4): 559-583

3 Leamer EE. Specification Searches: Ad Hoc Inference with Non-Experimental Data. New York: John Wiley & Sons, 1978. 15-90

4 Zio E, Apostolakis G. Two methods for the structured assessment of model uncertainty by experts in performance assessments of radioactive waste repositories. *Reliability Engineering and System Safety*, 1996, 54(2-3): 225-241

5 Nilsen T, Aven T. Models and model uncertainty in the context of risk analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 2003, 79(3): 309-317

6 Alvin KF, Oberkampf WL, Diegert KV, et al. Uncertainty quantification in computational structural dynamics: a new paradigm for model validation. The 16th International Modal Analysis Conference, Santa Barbara, CA, 1998

7 Reinert JM, Apostolakis GE. Including model uncertainty in risk-informed decision making. *Annals of Nuclear Energy*, 2006, 33(4): 354-369

8 Inseok P, Hemanth KA, Ramana VG. A Bayesian approach for quantification of model uncertainty. *Reliability Engineering and System Safety*, 2010, 95: 777-785

9 Oberkampf WL, Roy CJ. Verification and Validation in Scientific Computing. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 75-110

10 Roy CJ, Oberkampf WL. A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 2131-2144

11 陈学前, 肖世富, 刘信恩. 根部柔性梁的不确定性建模与确认. 力学与实践, 2012, 34(1): 52-56

12 陈学前, 沈展鹏, 刘信恩等. 考虑预测误差的模型内插与外推. 科学技术与工程, 2013, 13: 138-143

13 Link WA, Barker RJ. Model weights and the foundations of multimodel inference. *Ecology*, 2006, 87(10): 2626-2635

（责任编辑：刘希国）

（上接第 517 页）

(3) 钢管微裂纹顶端应力场的峰值应力随载荷增加而增加，应力场影响范围不随载荷增加发生扩展，但微裂纹顶端峰值塑性区域范围有明显的扩大.

(4) 计算结果表明钢管微裂纹尖端应力场，范围很小，而且小于平板微裂纹尖端应力场影响范围，采用裂纹尖端切面作为应力场作用平面，研究钢管裂纹应力场是可行的.

参 考 文 献

1 Bittencourt TN，Wawrzynek PA. Quasi automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problem. *Engineering Mechanics*, 1996, 55(2): 321-333

2 Paris PC, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation law. *Journal of Basic Engineering*, 1963, 85: 528-534

3 Okawa T, Sumi Y, Mohri M. Simulation-based fatigue crack management of ship structural details applied to longitudinal and transverse connections. *Marine Structures*, 2006, 19(4): 217-240

4 王丽丽，黄小平，崔维成. 复杂应力场中裂纹疲劳扩展寿命预报. 船舶力学，2011，19(4): 383-388

5 Xlein P, Gao H. Crack nucleation and growth as strain localization in a virtual-bond continuum. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 61: 21-48

6 张淑茳，史冬岩. 海洋工程结构的疲劳与断裂, 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社，2005. 21-57

7 Okawa T, Sumi Y, Mohri M. Simulation-based fatigue crack management of ship structural details applied to longitudinal and transverse connections. *Marine Structures*, 2006, 19(4): 217-240

8 钟勇，肖福仁，单以银等. 管线钢疲劳裂纹扩展速率与疲劳寿命关系的研究. 金属学报，2013，41(5): 523-528

9 葛清蕴，翟振东，刘东坡等. 带有裂纹的薄壁圆筒压力容器临界载荷研究. 建筑科学与工程，2005，22(4)：54-56

10 彭英，刘雪林. 直缝焊管裂纹扩展过程有限元数值模拟. 太原科技大学学报, 2013，34(2)：143-146

（责任编辑：刘希国）