

弯矩作用平面内稳定公式推导的力学问题

陈军明¹⁾ 雷航

(武汉理工大学理学院工程结构与力学系, 武汉 430070)

摘要 借助现行《钢结构设计规范》GB 50017-2003 中实腹式压弯构件弯矩作用平面内稳定实用计算公式的构建和演绎过程, 通过课堂教学环节, 让学生深刻体会力学知识在结构工程专业知识学习中的重要性, 同时也让学生学习解决科学研究问题的思维方法, 激发学生学习知识的兴趣, 培养学生综合应用知识和开展科学研究的能力。

关键词 钢结构, 教学环节, 公式构建和演绎, 思维方法

中图分类号: O342 **文献标识码:** A

DOI: 10.6052/1000-0879-13-037

我国高等院校为土木工程专业及相关专业学生开设了钢结构基本原理及设计课程。在教学中发现, 学生学习钢结构课程, 对课程中的公式推导过程不感兴趣, 他们在学习中更多的是关注公式的应用。作为钢结构课程教学老师认为, 掌握各种受力构件计算的基本原理, 熟悉公式的推导过程, 掌握推导过程中的力学知识以及相关专业知识的应用, 对学生未来从事结构设计, 特别是科学研究意义重大。钢结构课程涉及的力学知识丰富, 而且具有一定的难度, 特别是结构的稳定问题。论文借助演绎实腹式压弯构件弯矩作用平面内稳定性的实用计算公式的构建过程, 希望通过教学实施过程, 能让学生明白力学知识在结构工程专业知识学习中的重要性, 同时也让学生学习解决科学研究问题的思维方法。

稳定问题是钢结构的核心问题, 无论从事钢结构的研究还是钢结构的设计, 稳定问题都要求设计工作者十分重视。实腹式压弯构件弯矩作用平面内稳定承载力的计算有近似法和数值积分法两种方法。因为计算时要考虑残余应力和初弯曲、材料的弹塑性、构件的几何非线性等因素, 所以不论用近似法还是数值积分法计算, 其过程都是相当复杂的。压弯构件的平面内整体失稳属于二阶弹塑性分析的极值点失稳问题, 在构件达到极限承载力时, 构件已进入塑性。在轴心压力和弯矩的共同作用下, 压弯构件截面边缘纤维开始屈服进入了弹塑性受力状态, 这时随着载荷的增加, 弹性区缩小, 构件的抗弯刚度降低, 变形加快, 导致附加弯矩增加, 达到极限状态时内外力将无法平衡, 因而发生整体破坏。因此, 需要根据极值点失稳的条件来求解极限载荷。对于两端简支压弯构件, 目前国际上比较通行的表达方式是和强度计算类似的弯矩 M 和轴力 N 之间的相关关系式^[1]。我国现行《钢结构设计规范》GB50017-2003 采用了稳定极限承载力准则,

给出了实用的计算公式^[2]。

1 公式的构建与推导

现行《钢结构设计规范》GB50017-2003 中采用的实腹式压弯构件弯矩作用平面内稳定的实用计算公式的推演, 由以下 4 个环节构成^[3-5]。

(1) 二阶弹性理论分析

等弯矩作用的压弯构件如图 1, 两端简支, 长为 l 的杆, 在轴力 N 和端弯矩 M_x 作用下, 考虑压弯杆件的二阶弯矩和挠度, 进行二阶弹性分析。

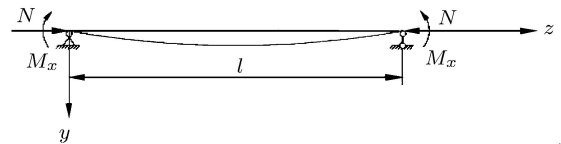


图 1 等弯矩作用的压弯构件

平衡方程

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} + Ny = -M_x \quad (1)$$

令 $k^2 = N/EI_x$, E 为构件材料弹性模量, I_x 为截面惯性矩, 其通解为

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz - \frac{M_x}{N} \quad (2)$$

由边界条件 $z = 0, z = l$ 时, $y = 0$, 令 $v = kl/2$, 得

$$y = \frac{M_x (1 - \cos 2v)}{N \sin 2v} \sin kz + \frac{M_x}{N} \cos kz - \frac{M_x}{N} \quad (3)$$

因为压弯杆在中点即 $z = l/2$ 处挠度最大, 所以杆件的最大挠度为

$$y_{\max} = \frac{M_x}{N} \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{Ex}}} - 1 \right) \quad (4)$$

式 (4) 中 $N_{Ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}$ 为弯矩作用平面内的轴心受压杆件欧拉临界力。

由于

$$\begin{aligned} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{Ex}}} &= 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{N}{N_{Ex}} + \frac{5\pi^4}{384} \left(\frac{N}{N_{Ex}} \right)^2 + \\ &\dots \approx \frac{1 + 0.25N/N_{Ex}}{1 - N/N_{Ex}} \end{aligned}$$

2013-01-31 收到第 1 稿, 2013-06-04 收到修改稿。

1) 陈军明, 博士, 教授, 主要从事工程力学专业、结构工程专业教学和研究工作。E-mail: jmchen1@whut.edu.cn

所以构件的最大弯矩 (中点处) 为

$$M_{\max} = M_x + N y_{\max} = M_x \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{N/N_{Ex}} = \frac{1 + 0.25N/N_{Ex}}{1 - N/N_{Ex}} M_x = \frac{\beta_{mx} M_x}{1 - N/N_{Ex}} \quad (5)$$

式中, β_{mx} 为等效弯矩系数. 对于其他受力形式的压弯杆可按类似的方法进行推导^[3], β_{mx} 取值不同. 规范^[2]中给出了框架柱和两端支撑的构件在不同载荷情况下的 β_{mx} 取值.

(2) 边缘屈服准则应用

考虑构件的初始缺陷 (初弯, 初应力, 残余应力) 的等效偏心距 e_0 , 基于边缘屈服准则

$$\frac{N}{A} + \frac{\beta_{mx}(M_x + N e_0)}{(1 - N/N_{Ex})W_{1x}} = f_y \quad (6)$$

令 $M_x = 0$, 即轴心受压的情况, 则可推出 $e_0 = \frac{(A f_y - N_x)(N_{Ex} - N_x)}{\beta_{mx} N_x N_{Ex}} \cdot \frac{W_{1x}}{A}$, N_x 为轴心受压构件的极限承载力, $N_x = \varphi_x A f_y$; A 为杆件截面面积; W_{1x} 为在弯矩作用平面内对较大受压纤维的毛截面模量; φ_x 为弯矩作用平面内的轴心受压杆件稳定系数; f_y 为材料屈服强度.

式 (6) 可以写成

$$\frac{N}{\varphi_x A} + \frac{\beta_{mx} M_x}{(1 - \varphi_x N/N_{Ex})W_{1x}} = f_y \quad (7)$$

(3) 最大强度准则应用

式 (7) 的得到借助了边缘屈服准则, 同时也运用了实际轴心受压构件极限承载力公式, 实际上此处也应用了最大强度准则, 从理论上讲, 此公式直接应用于实腹式压弯构件弯矩作用平面内稳定性的判断存在一定差距. 为得到更合适的判断公式, 科学工作者针对问题的实际情况, 考虑构件的初始缺陷、几何非线性以及材料的非线性等因素, 基于结构稳定的最大强度准则, 运用有限元数值积分方法对实腹式压弯构件进行了大量计算, 绘制了弯矩作用平面内稳定临界状态对应的 $M-N$ 曲线^[6], 发现对式 (7) 进行局部修正后可以较好地吻合数值计算 $M-N$ 曲线. 修正后的公式为

$$\frac{N}{\varphi_x A} + \frac{\beta_{mx} M_x}{(1 - 0.8N/N_{Ex})W_{px}} = f_y \quad (8)$$

其中 W_{px} 为截面塑性模量.

(4) 实用计算公式

工程设计中, 需限制构件截面塑性区的发展. 引进截面塑性发展系数 γ_x 考虑截面塑性发展, 将 W_{px} 用 $\gamma_x W_{1x}$ 代替. 依据现行钢结构设计原理, 将 N'_{Ex} 代替 N_{Ex} , 其中 $N'_{Ex} = N_{Ex}/1.1$, 用材料强度的设计值 f 代替屈服强度 f_y . 对式 (8) 进一步修正得到实腹式压弯构件弯矩作用平面内稳定的实用计算公式.

$$\frac{N}{\varphi_x A} + \frac{\beta_{mx} M_x}{\gamma_x W_{1x}(1 - 0.8N/N'_{Ex})} \leq f \quad (9)$$

2 小结

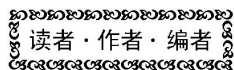
弯矩作用平面内的稳定实用公式推导过程中涉及的相关理论包括: 二阶弹性理论, 边缘屈服准则, 初始缺陷考虑, 最大强度准则, 考虑塑性发展限制, 现行钢结构设计原理.

从实用公式的演绎过程中, 用到了力学的二阶弹性理论、几何非线性和材料非线性、结构的稳定性理论以及钢结构设计原理的专业知识, 推演过程循序渐进, 环环相扣. 通过教学过程让学生体会力学知识在专业课程知识学习中的重要性, 也要让学生从中学习解决科学研究问题时, 如何寻找解决问题的方法, 如何正确将知识综合应用以及运用有关知识实现问题的求解.

参 考 文 献

- 1 沈祖炎, 陈扬骥, 陈以一. 钢结构基本原理. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005
- 2 GB 50017-2003. 钢结构设计规范. 北京: 中国计划出版社, 2003
- 3 陈绍蕃, 顾强. 钢结构基础. 北京: 中国建筑工业出版社, 2007
- 4 陈骥. 钢结构稳定理论与设计. 北京: 科学出版社, 2011
- 5 童根树. 钢结构的平面内稳定. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005
- 6 魏明钟. 钢结构. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2002

(责任编辑: 胡 漫)



读者·作者·编者

封面图片说明

封面图为温度分层实验 $U_1 = 0.13 \text{ m/s}$, $U_2 = 0.13 \text{ m/s}$ 流动显示的结果, 上图为分层 $\Delta T = 30 \text{ K}$; 下图为不分层 $\Delta T = 0 \text{ K}$. 从流动显示的结果表明, 混合层向速度小的那边偏移, 分层抑制湍流的混合, 对分层和不分层流动, 在混合层中涡量最大; 在分层流动中涡量主要集中在混合层, 在混合层以外涡量很小, 而剪切流动中除了在混合层里涡量比较大, 混合层以外的涡量比分层流动混合层外的涡量大.(图文供稿: 贾俊梅, 内蒙古工业大学理学院)