图 3 中梁截面 A 的挠度等于图 1 中梁截面 D 的挠度，即最大挠度

$$w_{\max}=\frac{Fbx^3}{3EIl}=\frac{Fb(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}lEI}$$

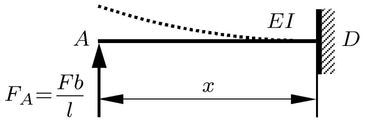

图 3 截面 A 的转角和挠度

3 结 语

本方法计算简支梁的最大挠度分为两个步骤：(1) 用悬臂梁法计算简支梁一端的转角 (该端的选取应使第 2 步计算较方便)；(2) 根据端面的转角为端面相对于梁的最大挠度处转角的条件，求得最大挠度截面的位置. 取最大挠度处为固定端，端面为自由端，用叠加法计算最大挠度. 本方法适用于计算受任意集中力、集中力偶和均布载荷的简支梁的最大挠度. 若简支梁有不止一个极值挠度，可用同样方法求出. 在计算简支梁的最大挠度时，仅需用到悬臂梁作用相应载荷的 3 组叠加公式 [1-2]，具有计算量少、计算快捷的特点.

参 考 文 献

1 单辉祖. 材料力学 (I). 北京：高等教育出版社，2009

2 刘鸿文. 材料力学 (上册). 北京：高等教育出版社，1992

3 苑学众. 逐段变形效应叠加法在简支梁中的应用. 力学与实践，2010, 32(2): 119-121

4 刘杰民，苑学众. 求解杆件弯曲位移的虚悬臂梁法. 力学与实践，2010, 32(6): 78-80

(责任编辑：胡 漫)

考虑瞬态反应影响的结构动力放大系数研究 1)

韩 芳 *,†,2) 钟冬望 *,† 蔡路军 *,†

*(武汉科技大学理学院工程力学系，武汉 430081)

†(冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室，武汉 430081)

摘要 针对《结构动力学》中 “瞬态反应和稳态反应” 的教学难点，从简谐载荷作用下单自由度体系的运动方程出发，推导瞬态振动的动力放大系数公式，并与稳态反应的动力放大系数公式进行对比，得到任意一个系数占主导因素的适用条件. 通过对比，使学生对振动响应计算有更全面认识和深入理解.

关键词 瞬态反应，稳态反应，动力放大系数，结构动力学

中图分类号：O327 **文献标识码**：A

DOI：10.6052/1000-0879-12-284

《结构动力学》在推导简谐载荷作用下单自由度体系的运动方程时，会得到以结构自振频率振动的瞬态反应项和以外载荷激振频率振动的稳态反应项，考虑到阻尼的存在会使瞬态振动很快衰减为零，因此通常会忽略瞬态反应影响，仅考虑由外载荷引起的稳态反应. 这样简化在绝大多数情况下是成立的，但教材同时提醒师生 “在特殊情况下，在反应的初始阶段瞬态反应项可能远远大于稳态反应项，从而成为结构最大反应的控制量”[1]. 实际工程中 [2]，例如作用时间极短的地震或爆破载荷，系统还来不及衰减，瞬态反应项的影响也就不能忽略 [3-4]. 为了使学生更深入理解瞬态和稳态反应对系统的影响差异，本文将从简谐载荷作用下的单自由度体系运动方程出发，推导瞬态反应中动力放大系数的影响公式，并为工程实际提供参考.

1 运动方程的全解

简谐载荷作用下单自由度体系的运动方程和初始条件为

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P_0\sin\omega t \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0}=u\,(0)\ ,\quad \dot{u}\,|_{t=0}=\dot{u}\,(0) \tag{2}$$

其中，ω 为外载荷激励圆频率，$\omega_{\rm n}$ 为体系自振圆频率，将阻尼 c 用阻尼比 ζ 代替，$c=2m\omega_{\rm n}\zeta$，得到运动方程

$$\ddot{u}+2\zeta\omega_{\rm n}\dot{u}+\omega_{\rm n}^2u=\frac{P_0}{m}\sin\omega t \tag{3}$$

将通解和特解代入，得到运动方程的全解

$$u\,(t)={\rm e}^{-\zeta\omega_{\rm n}t}\,(A\cos\omega_{\rm d}t+B\sin\omega_{\rm d}t)+ \\ C\sin\omega t+D\cos\omega t \tag{4}$$

其中，$u_{\rm s}\,(t)={\rm e}^{-\zeta\omega_n t}\,(A\cos\omega_{\rm d}t+B\sin\omega_{\rm d}t)$ 是以结构自振频率振动的瞬态反应项，$u_{\rm w}\,(t)=C\sin\omega t+D\cos\omega t$ 是以外载荷激振频率振动的稳态反应项；$\omega_{\rm d}=\omega_{\rm n}\sqrt{1-\zeta^2}$，

2012–07–26 收到第 1 稿，2013–01–08 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (51108358), 湖北省重点实验室基金 (201304) 和武汉科技大学校基金 (2012Z49) 资助项目.

2) 韩芳，1980 年生，女，博士，副教授，主要从事计算力学和结构动力分析的教学与研究. E-mail: hanfang522@163.com

A,B,C,D 为系数，求得

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{P_0}{m\omega_{\rm n}^2}\frac{1-(\omega/\omega_{\rm n})^2}{\left[1-(\omega/\omega_{\rm n})^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_{\rm n})\right]^2} \\ D &= \frac{P_0}{m\omega_{\rm n}^2}\frac{-2\zeta\omega/\omega_{\rm n}}{\left[1-(\omega/\omega_{\rm n})^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_{\rm n})\right]^2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

引入零初始条件，$u\,|_{t=0}=u(0)=0,\ \dot u\,|_{t=0}=\dot u(0)=0$，得到

$$A=-D,\quad B=\frac{C\omega+D\zeta\omega_{\rm n}}{-\omega_{\rm n}\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{6}$$

当载荷作用时间极短时，即 $t\to 0$，系统还来不及衰减，考虑瞬态振动项的影响. 令 $u_{\rm s}$ 代表瞬态振动的幅值，$u_{\rm w}$ 代表稳态振动的幅值，则 $u_{\rm s}=\sqrt{A^2+B^2}$，$u_{\rm w}=\sqrt{C^2+D^2}$，将系数 A,B,C,D 代入计算，得到

$$\left.\begin{aligned} u_{\rm s} &= \frac{P_0\omega}{m\omega_{\rm n}\sqrt{(1-\zeta^2)\left[(\omega_{\rm n}^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_{\rm n}^2\omega^2\right]}} \\ u_{\rm w} &= \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega_{\rm n}^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_{\rm n}^2\omega^2}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

2　动力放大系数

单自由度体系的等效静位移为 $u_{\rm st}=\dfrac{P_0}{k}=\dfrac{P_0}{m\omega_{\rm n}^2}$，分别求出瞬态振动和稳态振动的位移放大系数为 $\beta_{\rm s}$ 和 $\beta_{\rm w}$，即

$$\left.\begin{aligned} \beta_{\rm s} &= \frac{\omega/\omega_{\rm n}}{\sqrt{(1-\zeta^2)\left\{\left[1-(\omega/\omega_{\rm n})^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_{\rm n})\right]^2\right\}}} \\ \beta_{\rm w} &= \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_{\rm n})^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_{\rm n})\right]^2}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

令 $t=\omega/\omega_{\rm n}$，则 $\beta_{\rm s}=\dfrac{t}{\sqrt{(1-\zeta^2)\left[(1-t^2)^2+(2\zeta t)^2\right]}}$，表明瞬态响应的动力放大系数是频率比 t 和阻尼比 ζ 的函数. 当某一振动系统确定时，阻尼比 ζ 即为常数，令 ${\rm d}\beta_{\rm s}/{\rm d}t=0$，求得 $t=\omega/\omega_{\rm n}=1$，表明共振时，瞬态响应的动力放大系数达到最大.

比较瞬态振动放大系数 $\beta_{\rm s}$ 与稳态振动放大系数 $\beta_{\rm w}$ 的大小，得到 $\dfrac{\beta_{\rm s}}{\beta_{\rm w}}=\dfrac{\omega/\omega_{\rm n}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$，分 3 种情况讨论：(1) 当 $0<\omega/\omega_{\rm n}<1$ 时，$\beta_{\rm s}$ 与 $\beta_{\rm w}$ 的大小取决于阻尼比 ζ 的大小，若 $\sqrt{1-\zeta^2}\leqslant\omega/\omega_{\rm n}<1$，则 $\beta_{\rm s}\geqslant\beta_{\rm w}$；反之 $\beta_{\rm s}<\beta_{\rm w}$；(2) 当 $\omega/\omega_{\rm n}=1$ 时，$\beta_{\rm s}=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$，$\beta_{\rm w}=\dfrac{1}{2\zeta}$，所以 $\beta_{\rm s}>\beta_{\rm w}$；(3) 当 $\omega/\omega_{\rm n}>1$ 时，显然 $\beta_{\rm s}>\beta_{\rm w}$. 由此可见，特定情况下，瞬态响应的动力放大系数 $\beta_{\rm s}$ 大于稳态振动放大系数 $\beta_{\rm w}$，可能对结构振动起控制作用，这也验证了教材中“特殊情况下，瞬态反应项可能远远大于稳态反应项”[1] 的结论.

3　瞬态振动幅值

考察瞬态振动位移幅值表达式

$$u_{\rm s}=\frac{P_0\omega}{m\omega_{\rm n}\sqrt{(1-\zeta^2)\left[(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_{\rm n}^2\omega^2\right]}}$$

令 $\varphi(\omega_{\rm n})=\omega_{\rm n}^2\left[\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+4\zeta^2\omega_{\rm n}^2\omega^2\right]$，因为简谐载荷的激励圆频率 ω 是一个定值，则 $u_{\rm s}=\dfrac{P_0\omega}{m\sqrt{(1-\zeta^2)\,\varphi(\omega_n)}}\propto\dfrac{1}{\sqrt{\varphi(\omega_{\rm n})}}$，现在分析函数 $\varphi(\omega_{\rm n})$ 的特性，这是一个关于 ω_n 的四次函数表达式.

讨论：令 $\varphi'(\omega_{\rm n})=2\omega_{\rm n}\left[3\omega_{\rm n}^4-4\omega^2\left(1-2\zeta^2\right)\omega_{\rm n}^2+\omega^4\right]=0$，且 $\omega_{\rm n}>0$，求得拐点

$$\omega_{\rm n1}^2=\frac{2\omega^2\left(1-2\zeta^2\right)+\omega^2\sqrt{1-16\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)}}{3}$$

$$\omega_{\rm n2}^2=\frac{2\omega^2\left(1-2\zeta^2\right)-\omega^2\sqrt{1-16\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)}}{3}$$

当阻尼比很小时，即 $\zeta\to 0$ 时，略去负根，$\omega_{\rm n1}\approx\omega$，$\omega_{\rm n2}\approx\omega/\sqrt{3}$，将拐点值代入 $\varphi''(\omega_{\rm n})=2\left[15\omega_{\rm n}^4-12\omega_{\rm n}^2\omega^2\left(1-2\zeta^2\right)+\omega^4\right]$，得 (1) $\varphi''(\omega_{\rm n1})=\varphi''(\omega)=8\omega^4>0$，则 $\varphi(\omega_{\rm n})$ 有极小值，$u_{\rm s}$ 有极大值；(2) $\varphi''(\omega_{\rm n2})=\varphi''\left(\omega/\sqrt{3}\right)=-8/3\omega^4<0$，则 $\varphi(\omega_{\rm n})$ 有极大值，$u_{\rm s}$ 有极小值.

因此，阻尼比很小时 ($\zeta\to 0$ 时) 可以得到以下结论：当 $\omega_{\rm n1}=\omega$ 时，结构发生共振，瞬态振动达到位移幅值；当 $\omega_{\rm n2}=\omega/\sqrt{3}$ 时，瞬态振动位移达到最小值，即在外激励圆频率 ω 一定的情况下，可以通过概念设计体系自振圆频率 $\omega_{\rm n}$，对瞬态振动减振有利 [5].

4　结　论

从简谐载荷作用下单自由度体系的运动方程出发，推导瞬态振动的动力放大系数公式，计算表明，瞬态振动的动力放大系数与外载荷激励圆频率、体系自振圆频率及阻尼比有关；此外，将瞬态和稳态两种情况下的动力放大系数进行对比，得到任意一个系数占主导因素的适用条件，使学生对振动响应计算有了更全面的认识和更深入的理解.

参 考 文 献

1 刘晶波. 结构动力学. 北京：机械工业出版社，2005
2 陈厚群. 混凝土大坝抗震中的力学问题. 力学与实践，2006，28(2)：1-8
3 刘延柱. 振动力学. 北京：高等教育出版社，2003
4 江见鲸. 防灾减灾工程学. 北京：机械工业出版社，2005
5 Han F, Zhong DW, Mo JY. Discriminant condition of influencing dynamic response for structure-equipment system. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, 90-93: 1477-1481

(责任编辑：刘希国)