

计算梁弯曲变形和内力的简易方法

朱伊德¹⁾

(上海应用技术学院机械工程学院, 上海 201418)

摘要 介绍一种合二而一的方法, 从挠曲线的一般形式出发, 通过边界条件确定待定常数, 能同时得到挠曲线方程, 转角方程, 弯矩方程, 剪力方程和支座反力. 既避免了微分与积分运算又无需区分静定与超静定梁, 也不论挠曲线方程是否分段, 都可获解决. 而且方法程式化具有便捷易学和一气呵成的特点. 同时还深刻揭示出变形和内力的有机联系.

关键词 弯曲变形, 弯曲内力, 超静定梁, 边界条件, 复杂分布载荷

中图分类号: O341 文献标识码: A

DOI: 10.6052/1000-0879-12-106

引言

梁的弯曲内力和弯曲变形是材料力学中两大教学重点和难点, 是解决梁的弯曲强度和刚度问题的基础, 也为解弯曲超静定问题等所必须. 计算梁的弯曲变形的解析方法有两类, 一类需要通过积分运算, 如积分法^[1]、初参数法^[2]、奇异函数法、莫尔积分法等; 另一类则无需积分, 如图乘法, 共轭梁法, 卡氏定理, 拉氏变换^[3]等. 这些方法在应用时一般先要写出弯矩方程, 且过程冗长. 文献[4]给出了求解超静定刚架的一种新方法: 通过边界条件确定含有待定系数的挠度曲线方程, 对除刚节点外弯矩方程不分段的刚架给出了算例. 本文将此思想用到作用有复杂分布载荷的静定与超静定梁(无需区分), 仅用代数方法求出 N 个系数后, 即可快速并同时得出挠曲线方程、转角方程、弯矩方程、剪力方程和支座反力. 非常省时省力. 既避免了微分与积分运算又无需像用叠加法那样去查表或记忆公式.

1 基本方法

建立平面直角坐标系, x 轴水平向右表示梁的位置, y 轴竖直向上表示梁的挠度; 假设分布载荷 $q(x)$ 向上作用为正, 向下作用为负(如图1). 在小变形和线弹性条件下, 设等截面梁 ($EI = \text{常量}$) 在各种分布载荷作用下的挠曲线方程的形式为

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n \quad (1)$$

其中, a_0, a_1, \dots, a_n 为待定常数, N 为与梁上的分布载荷形式有关的整数(与集中载荷和力偶无关), 见表1.

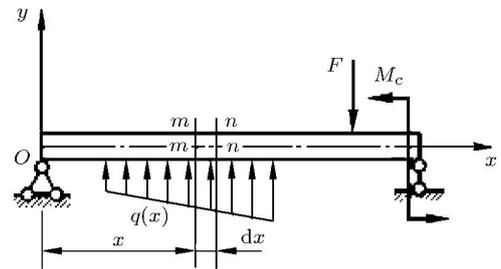


图1 基本方法示意图^[1]

表1 梁上的分布载荷与 N 的关系

梁上的分布载荷形式	N
无分布载荷	3
均布载荷	4
梯形分布载荷	5
抛物线分布载荷	6
三次型分布载荷	7
N 次型分布载荷	$N + 4$

根据材料力学中小变形假设下的挠曲线近似微分方程以及载荷集度、剪力和弯矩间的关系^[1]可分别写出转角方程 $\theta(x)$, 弯矩方程 $M(x)$, 剪力方程 $F_s(x)$ 以及分布载荷集度 $q(x)$ 依次为

$$\theta = y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 \quad (2)$$

$$M = EIy'' = EI(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4) \quad (3)$$

$$F_s = EIy''' = EI(6a_3 + 24a_4 x + 60a_5 x^2 + 120a_6 x^3) \quad (4)$$

$$q(x) = -EIy'''' = -EI(24a_4 + 120a_5 x + 360a_6 x^2) \quad (5)$$

其中 EI 为梁的抗弯刚度, 弯矩和剪力的正向按通常规定. 式(1)~(5)中各个待定系数 a_i 可由边界条件并比较式(5)两边系数得出; 当式(1)~(5)需分段表达时, 再增加连续和光滑条件. 显然这些条件是关于待定系数 a_0, a_1, \dots, a_n 的线性代数方程, 可以证明, 其系数矩阵是满秩阵.

2 算例

例1 图2所示等截面简支梁上的分布载荷集度(抛物线型)为 $q(x) = \frac{4q_0 x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$, 求该梁的内力方程和变形

2012-03-12 收到第1稿, 2012-06-26 收到修改稿.

1) E-mail: zyd@sit.edu.cn

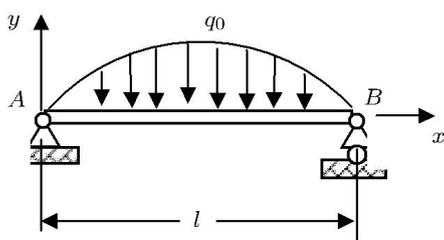


图 2 复杂分布载荷作用的静定梁

方程.

解 因梁上作用的是抛物线分布载荷, 所以 $N = 6$. 挠曲线与分布载荷的关系满足式 (5), 再根据两端的位移边界条件可得到 7 个关于 a_i 的线性方程, 容易解得

$$a_0 = 0, a_1 = -\frac{q_0 l^3}{30EI}, a_2 = 0, a_3 = \frac{q_0 l}{18EI}$$

$$a_4 = 0, a_5 = -\frac{q_0}{30EI}, a_6 = \frac{q_0}{90EI^2}$$

将求得的 a_i 分别代入式 (1)~(4), 即可同时得到所要求的方程, 计算中不用求支座反力.

例 2 图 3 所示两端固定等截面梁受梯形分布载荷集度 $q(x) = q_1 - \frac{q_1 - q_2}{l}x$ 作用, 求该梁的内力方程, 变形方程和支座反力.

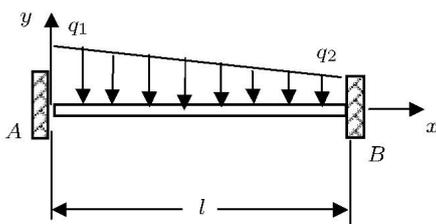


图 3 复杂分布载荷作用的超静定梁

解 因梁上作用的是梯形分布载荷, 所以 $n = 5$. 挠曲线与分布载荷的关系满足式 (5) 并根据两端的边界条件, 得到 6 个关于 a_i 的线性方程, 解得

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -\frac{3q_1 + 2q_2}{120EI}l^2, a_3 = \frac{7q_1 + 3q_2}{120EI}l$$

$$a_4 = -\frac{q_1}{24EI}, a_5 = \frac{q_1 - q_2}{120EI}$$

将它们分别代入式 (1)~(4), 依次得到挠曲线方程、转角方程、弯矩方程和剪力方程.

弯矩方程和剪力方程为

$$M = -\frac{3q_1 + 2q_2}{60}l^2 + \frac{7q_1 + 3q_2}{20}lx - \frac{q_1}{2}x^2 + \frac{q_1 - q_2}{6l}x^3$$

$$F_s = \frac{7q_1 + 3q_2}{20}l - q_1x + \frac{q_1 - q_2}{2l}x^2$$

于是可以求得支座反力为

$$F_A = F_s|_{x=0} = \frac{7q_1 + 3q_2}{20}l \quad (\uparrow)$$

$$F_B = F_s|_{x=l} = -\frac{3q_1 + 7q_2}{20}l \quad (\uparrow)$$

$$M_A = M|_{x=0} = -\frac{3q_1 + 2q_2}{60}l^2 \quad \text{逆时针}$$

$$M_B = M|_{x=l} = -\frac{2q_1 + 3q_2}{60}l^2 \quad \text{顺时针}$$

例 1 和例 2 中各方程是不分段的, 下面给出的是集中载荷作用下分段情况的算例.

例 3 等截面简支梁受集中载荷作用如图 4 所示, 写出图示梁的挠曲线方程.

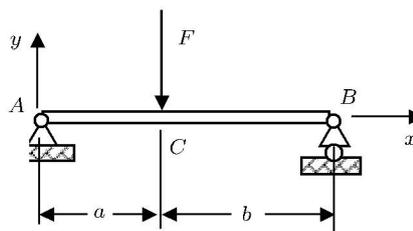


图 4 集中载荷作用下分段的情况

解 因梁上有集中力作用, 挠曲线是分段函数, AC 段和 CB 段上均无分布载荷作用, 所以 $N = 3$.

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (0 \leq x < a) \quad (6)$$

$$y_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad (a < x \leq l) \quad (7)$$

根据两端的边界条件, 得

$$y_1|_{x=0} = 0, \quad a_0 = 0 \quad (8)$$

$$y_2|_{x=l} = 0, \quad b_0 + b_1l + b_2l^2 + b_3l^3 = 0 \quad (9)$$

在 C 点的连续条件和光滑条件

$$\left. \begin{aligned} y_1|_{x=a} &= y_2|_{x=a} \\ a_0 + aa_1 + a^2a_2 + a^3a_3 &= b_0 + ab_1 + a^2b_2 + a^3b_3 \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1'|_{x=a} &= y_2'|_{x=a} \\ a_1 + 2aa_2 + 3a^2a_3 &= b_1 + 2ab_2 + 3a^2b_3 \end{aligned} \right\} (11)$$

力边界条件是铰链处的弯矩为 0, 剪力为支座反力, 由式 (3) 得

$$M|_{x=0} = 0, \quad 2EIa_2 = 0 \quad (12)$$

$$M|_{x=l} = 0, \quad EI(2b_2 + 6b_3l) = 0 \quad (13)$$

$$F_s|_{x=0} = F_A, \quad 6EIa_3 = F_A \quad (14)$$

$$F_s|_{x=l} = -F_B, \quad 6EIb_3 = -F_B \quad (15)$$

联立方程(8)~(15),注意到 $F_A = bF/l$, $F_B = aF/l$,解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = -\frac{Fb}{6EI} (l^2 - b^2), a_2 = 0, a_3 = \frac{Fb}{6EI} \\ b_0 &= \frac{Fa^3}{6EI}, b_1 = -\frac{Fa(a^2 + 2l^2)}{6EI} \\ b_2 &= \frac{Fa}{2EI}, b_3 = -\frac{Fa}{6EI} \end{aligned}$$

这和积分法得到的结果是一致的.

3 结语

本文方法及其算例表明:

(1) 方法具有普遍性,不论是静定还是超静定,也不论挠曲线方程是否分段,都可以解决.特别是复杂分布载荷作用下单跨超静定梁的求解尤具优势.

(2) 方法程式化,根据载荷形式确定挠曲线方程形式,边界条件给出待定系数满足的线性代数方程.

(3) 方法便捷,主要工作量是确定边界条件和解线性代数方程,一旦待定系数确定,挠曲线方程、转角方程、弯矩方程、剪力方程、支座反力可一并得到.

参考文献

- 刘鸿文. 材料力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 孙训芳, 方孝淑, 关来泰. 材料力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2002
- 刘明超, 丁晓燕. 拉氏变换求解梁的挠曲线方程. 力学与实践, 2012, 34(2): 78-80
- 黄太川, 倪尔有. 求解超静定刚架的一种新方法. 力学与实践, 2003, 25(6): 65-66

(责任编辑: 胡漫)

超静定结构温度应力问题探讨

李忠芳^{*,1)} 马万征[†] 宛传平^{*} 陈丰^{*} 张华^{*}

^{*}(安徽科技学院机电与车辆工程学院, 安徽凤阳 233100)

[†](安徽科技学院城建与环境学院, 安徽凤阳 233100)

摘要 把温度应力问题分为两个过程求解. 先解除多余约束, 将超静定问题转化为静定问题, 使杆件自由伸长或缩短. 再按照原来的方式将所有杆件安装好, 由于温度升高后, 杆件的长度可能不再匹配, 所以会产生装配应力, 这时便转化为一般的装配应力问题. 这样便把耦合在一起的温度应力和拉压应力分解成两个过程, 令学生感到非常容易接受.

关键词 温度应力, 超静定, 装配应力

中图分类号: O341 文献标识码: A

DOI: 10.6052/1000-0879-12-068

超静定结构温度应力的求解^[1-5], 对许多同学来讲都不容易理解. 原因是变形引起应力还是应力引起变形, 是一个难分难解的疑问. 本文通过将问题拆解, 转化为一个静定问题的自由膨胀与超静定问题的装配应力问题.

1 超静定温度应力问题实例

如图 1 所示, 1, 2, 3 号杆的材料都相同, 长度分别为 $l, l, l \cos \beta$. 当温度由 T_1 变到 T_2 时, 求各杆的内力. (杆 1, 2, 3 的线膨胀系数为 $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3, \Delta T = T_2 - T_1$).

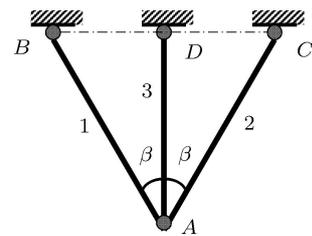


图 1 超静定结构简图

2 传统解法

(1) 选 A 点为研究对象, A 点受力如图 2.

根据图 2, 列平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= F_{N1} \sin \beta - F_{N2} \sin \beta = 0 \\ \sum Y &= F_{N1} \cos \beta + F_{N2} \cos \beta + F_{N3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

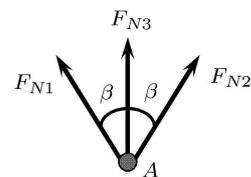


图 2 A 点受力分析

本文于 2012-02-20 收到.

1) 李忠芳, 女, 博士, 主要从事波动方程数值计算、检测实验研究. E-mail: lizhongfang_ahstu@yeah.net