振动力学基础课程中的非线性振动

陈立群[1)]

(上海大学力学与工程科学学院，上海 200444)
(上海市应用数学和力学研究所，上海 200444)

摘要　本文总结在振动力学基础课程教学中对非线性振动的处理。教学目的是了解最基本的非线性振动近似分析方法和典型非线性振动现象。主要内容包括谐波平衡法、非线性受迫振动中的跳跃现象、自激振动、内共振中的饱和和双跳跃、整星缩比模型的非线性能量汇减振和圆环的非线性隔振。结合实例说明建模和分析过程中的简化、力学的应用性和力学与数学的密切关系。

关键词　振动力学，非线性，谐波平衡，减振，隔振

中图分类号: O312　　**文献标识码**: A　　doi: 10.6052/1000-0879-23-106

NONLINEAR OSCILLATIONS IN FUNDAMENTAL COURSE OF VIBRATION

CHEN Liqun[1)]

(School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200444, China)

Abstract　The treatment of nonlinear oscillations is explored as a part of the fundamental course of vibration mechanics. The teaching goal is to understand a basic approximate analytical method in nonlinear oscillations and typical nonlinearly oscillating phenomena. The main contents include harmonic balance method, jump phenomenon in nonlinear forced oscillations, self-excited vibrations, saturation and double jumping in internal resonance, nonlinear energy sink for scaled whole-spacecraft vibration reduction and circular nonlinear vibration isolation via ring. The case studies are adopted to highlight simplifications in modeling and analysis, applicability of mechanics, and a close affinity between mathematics and mechanics.

Keywords　mechanics of vibration, nonlinearity, harmonic balance, vibration reduction, vibration isolation

由于自然界和工程系统中广泛存在着非线性因素和现象，非线性振动逐渐成为振动力学的一部分，在多种国内外振动教材[1-3]中有相关内容。近年的振动力学基础课程的教学实践中，也有非线性振动介绍，例如搓动龙洗的自激振动实验[4]和绳系卫星系统相轨迹和奇点[5]。“如何在有限学时的限制和不增加学习负担条件下使学生获得必要的非线性振动知识，无论对教材编写或对教师的教学实践都是值得认真研究和探索的课题”[6]。文献 [7] 给出了在本科生振动力学教材中叙述非线性振动的一种方案。本文总结在上海大学力学专业本科生振动力学课堂教学实践中对非线性振动内容的处理。相关内容也可供为工程专业研究生开设的 40 学时振动力学基础课程参考。

1　总体考虑

力学专业的振动力学课程在 1999 年至 2001 年曾经是 50 学时，可以大体上遵循教材 [7] 的体系，较为统一地处理线性振动和非线性振动。2002 年起，振动力学课为 40 学时，只能侧重线

2023–03–13 收到第 1 稿，2023–04–19 收到修改稿。

1) 陈立群，教授，研究方向为非线性动力学和振动控制。E-mail：lqchen@shu.edu.cn

引用格式: 陈立群. 振动力学基础课程中的非线性振动. 力学与实践, 2023, 45(6): 1382-1384
Chen Liqun. Nonlinear oscillations in fundamental course of vibration. *Mechanics in Engineering*, 2023, 45(6): 1382-1384

性振动的教学。现行教学大纲安排非线性振动简介和混沌简介各 2 学时。如果有节假日等导致课时减少时，只保留非线性振动的 2 学时。

非线性振动部分的教学目的包括 3 个方面：（1）了解典型的非线性振动现象以及研究这些现象所需要的最基本近似分析方法；（2）初步了解非线性振动研究中建模、分析、仿真等环节及其相互关系；（3）具有分析和解释最常见的非线性振动现象的初步能力。

需要指出的是，通过对非线性振动的学习，还可以对线性振动有更深入的理解。例如，对比非线性振动，更明确研究线性振动的必要性至少包括 3 个方面：其一是有效性，在特定时间和变量范围内近似预测动力学行为；其二是便利性，使得理论分析可能和数值仿真易行；其三是工具性，有些非线性振动问题在一定条件下可以用一系列线性问题的解逼近。又例如，通过与非线性减振和非线性隔振的比较，更明确线性减振和线性隔振的局限。

2　具体内容

两学时教学内容分为非线性振动基础知识和非线性减振隔振两部分，各约一个学时。

非线性振动基础知识包括非线性的概念、非线性振动分析的基本方法和典型非线性振动现象 3 个方面。非线性的概念包括非线性的数学描述、非线性的分类、机械和电磁系统中非线性因素、线性振动和非线性振动比较。特别说明研究非线性振动的必要性，自然规律本身是非线性的，存在非线性现象如自激振动、内共振和混沌等，恰当设计的非线性能改进振动系统的动态特性。非线性振动的分析方法只叙述推导过程简单、物理意义清晰的谐波平衡法，从简谐外激励作用下含立方非线性项振动系统个案分析入手，导出幅频响应特性，随后也讨论较为一般的周期受周期外激励作用单自由度非线性振动系统。非线性振动典型现象是教学的重点，对于前述非线性受迫振动分别介绍了跳跃现象、超谐波响应和亚谐波响应，从物理机制入手分析了自激振动并让有兴趣的学生课后对非线性阻尼系统进行谐波平衡分析，以含二次非线性项两自由度系统受迫振动为例简要介绍了内共振的饱和现象和双跳跃现象。非线性振动分析的基本方法和典型的非线性振动现象取自教材 [7] 中相关内容，但没有进行详细的推导。

简要介绍非线性减振和非线性隔振，以便让学生对前述恰当设计的非线性能改进振动系统的动态特性有初步的了解。减振是对整星缩比模型设计了非线性能量汇，可以克服线性动力吸振器产生新共振频率的局限性，实验表明能实现宽频减振并保持系统固有频率基本不变；基于前两阶固有频率相同可以建立降阶简化模型，用谐波平衡法导出幅频特性，解释实验结果。非线性隔振采用圆环，通过对曲梁的分析可以导出非线性刚度，为分段函数，都涉及椭圆函数，基于实验数据辨识系统的等效黏性阻尼；在所得到单自由度非线性振动模型基础上，可以用谐波平衡法导出幅频响应特性；用数显式测力计的静力学实验验证导出的非线性刚度，振动实验验证了近似解析方法预测的幅频响应曲线，包括跳跃现象。这部分应用内容分别取材于研究论文整星缩比模型的非线性能量汇减振[8] 和圆环非线性隔振[9]。两篇论文共同特点是都有建模和分析，以及实验验证。

3　思政元素

课程思政提倡思政元素春风化雨、润物细无声地融入正常的课程教学中[10]。非线性振动的基础知识有机内在地包含思政元素，试总结几点如下。

在研究方法方面，突出建模和近似分析的简化思路。所谓简化，其实就是抓住主要矛盾。“得其精而忘其粗，在其内而忘其外，见其所见，不见其所不见，视其所视，而遗其所不视”(《列子·说符》)。用谐波平衡法进行近似分析时，聚焦于非线性项对低阶次谐波的影响，而忽略了对高阶次谐波的影响。在适当简化的基础上，数学建模中包括不同的思路，从原理出发的理论建模如圆环隔振器非线性刚度的推导，基于实验数据的辨识建模如圆环隔振器的等效黏性阻尼系数的确定，基于功能等效建立简化模型如整星降阶模型。

作为振动力学课程的一部分，非线性振动的简介试图能彰显力学学科特色。因此除了基本近似分析方法和典型非线性振动现象外，增加了非线性减振和隔振的应用性专题。与物理学等基础

科学以认识世界为主不同，力学同时也是应用科学，具有改造世界的功能。借用马克思《关于费尔巴哈的提纲》(Thesen über Feuerbach) 的话，“哲学家们只用不同的方式解释世界，而问题在于改变世界 (Die Philosophen haben die Welt nur verschieden interpretiert; es kömmt drauf an, sie zu verändern)。”力学既要解释世界，也要改造世界。在认识世界的基础上改造世界，在改造世界的过程中更好地认识世界。非线性振动所涉及的问题，不仅有分析和仿真，也有设计和优化。

非线性振动的教学还突出力学与数学的密切关系。基于谐波平衡进行简单的公式推导和数值计算，可预测幅频响应曲线出现跳跃现象，并得到实验验证。不加推导给出的圆环的非线性刚度，为含有椭圆函数的非常复杂的数学表达式。但奇妙的是，恢复力随变形变化的曲线，与静力实验结果吻合很好。这种数学在力学中的适用性、准确性和预见性，或许就是诺贝尔奖得主维格纳 (Eugene Paul Wigner, 1902—1995) 与图灵奖得主汉明 (Richard Wesley Hamming, 1915—1998) 分别讨论的数学在自然科学中的“不可思议的有效性 (the unreasonable effectiveness)”[11-12]。但另一方面，力学不仅是数学。在力学中，数学建模和分析的结果，需要有实验的验证。

教学中采用的非线性振动两个应用实例都是课程教学团队在主流期刊上发表的研究结果，意在鼓励学生创新探索。科学研究并不神秘，也不一定需要大量的准备知识。只要对科学问题有清晰的理解，并及时学习研究需要的准备知识，就有可能采取分析、数值或实验的方法，在特定方面取得研究进展。

4 结语

本文总结在本科生振动力学课程中简介非线性振动的思考和实践。教学目的主要是了解典型非线性振动现象及其最基本的分析方法，以便能对常见非线性振动现象进行初步的理论分析和解释。教学内容包括谐波平衡法、典型非线性振动现象（跳跃、超谐波响应、亚谐波响应、自激振动、内共振中的饱和和双跳跃）以及非线性在减振和隔振中的应用。在教学过程中，帮助学生了解建模和分析过程中的简化、理解力学学科具有应用学科的功能和体认力学与数学的密切关系。

参 考 文 献

1 陈立群. 国外振动新教材的内容和特点. 力学与实践, 2009, 30(1): 79-81

2 于开平. 振动力学相关课程设置及教材分析. 力学与实践, 2017, 39(2): 185-191
Yu Kaiping. An analysis of the curriculum and teaching material related to vibration mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(2): 185-191 (in Chinese)

3 黄修长, 华宏星. 国外最新振动学教材调研及特色分析. 力学与实践, 2022, 44(4): 960-968
Huang Xiuchang, Hua Hongxing. Investigation and analysis of recent textbooks on vibration abroad. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(4): 960-968 (in Chinese)

4 刘习军, 张素侠. 关于振动力学教学中的趣味性与科学性. 力学与实践, 2012, 34(5): 63-66

5 刘丽丽, 李东平. 振动力学课程教学改革与实践探讨. 力学与实践, 2014, 36(5): 667-669, 672

6 刘延柱, 陈立群. 关于振动力学教材中的非线性振动// 第五届力学课程报告论坛论文集. 北京: 高等教育出版社, 2011

7 刘延柱, 陈立群, 陈文良. 振动力学, 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2019

8 Yang K, Zhang Y, Ding H, et al. Nonlinear energy sink for whole-spacecraft vibration reduction. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2017, 139(2): 021011

9 Lu Z, Gu D, Ding H, et al. Nonlinear vibration isolation via a circular ring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 136(1): 106490

10 叶志明, 王骞, 陈伶俐. 论教书育人与课程思政之关系. 力学与实践, 2021, 43(5): 744-747
Ye Zhiming, Wang Qian, Chen Lingli. On the relationship between the course education and imparting knowledge and cultivating people. *Mechanics in Engineering*, 2021, 43(5): 744-747 (in Chinese)

11 Wigner EP. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 1960, 13(1): 1-14

12 Hamming RW. The unreasonable effectiveness of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 1980, 87(2): 81-91

(责任编辑: 胡 漫)